

ÉLÉMENTS

DE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

A L'USAGE

DES CANDIDATS AU BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

A L'ÉCOLE DE MARINE ET A L'ÉCOLE MILITAIRE DE SAINT-CYR

PAR MM.

CH. BRIOT

Maître de conférences à l'École normale supérieure
Professeur de mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis

ET

CH. VACQUANT

Professeur de mathématiques spéciales au lycée Napoléon

PARIS

LIBRAIRIE DE L. HACHETTE ET C[ie]

BOULEVARD SAINT-GERMAIN, N° 77

1863

ÉLÉMENTS

DE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

A LA MÊME LIBRAIRIE :

Paris. — Imprimerie de Ch. Lahure et Cie, rue de Fleurus, 9.

ÉLÉMENTS

DE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

A L'USAGE

DES CANDIDATS AU BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES
A L'ÉCOLE DE MARINE ET A L'ÉCOLE MILITAIRE DE SAINT-CYR

PAR MM.

CH. BRIOT

Maître de conférences à l'École normale supérieure
Professeur de mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis

ET

CH. VACQUANT

Professeur de mathématiques spéciales au lycée Napoléon



PARIS

LIBRAIRIE DE L. HACHETTE ET Cie

BOULEVARD SAINT-GERMAIN, N° 77

1863

ÉLÉMENTS

DE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

CHAPITRE PREMIER.

PRINCIPES.

Insuffisance du dessin ordinaire. — Représentation d'un point par ses projections. — Traces d'un plan. — Projections d'une droite. — Traces d'une droite. — Reconnaître si une droite est située dans un plan. — Reconnaître si un point est situé dans un plan. — Distance de deux points.

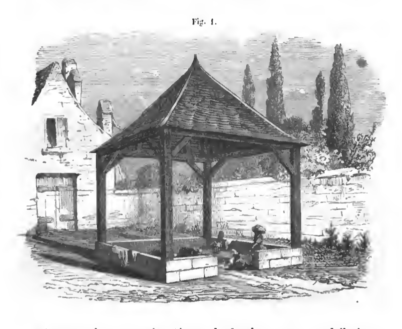
Insuffisance du dessin ordinaire.

1. Par le dessin linéaire, on représente les figures planes au moyen de figures exactement semblables, avec un rapport de similitude donné. Si, sur le dessin, à l'aide de l'échelle convenue, on mesure avec un compas la distance de deux points quelconques, on obtient cette longueur telle qu'elle est dans la figure que le dessin a pour but de représenter. De même, si l'on mesure avec un rapporteur l'angle de deux droites, on obtient la vraie valeur de cet angle. Le dessin linéaire ne laisse donc rien à désirer quant aux figures planes.

Mais il n'en est plus de même pour les figures à trois dimensions. Si l'on voulait représenter une figure à trois dimensions par une figure exactement semblable, il faudrait construire un modèle en bois, en métal, ou en plâtre, ce qui serait extrêmement long et très-dispendieux. Le dessin ordinaire, qui est basé

sur les principes de la perspective, a pour but de produire sur l'œil la même impression que les objets réels. Mais la similitude n'est pas conservée dans le dessin lui-même: des longueurs égales ne sont pas représentées sur le dessin par des longueurs égales; elles sont plus ou moins réduites, suivant l'inclinaison sous laquelle on les voit; les angles sont aussi altérés. La figure 1 représente le dessin d'un lavoir; la base du lavoir, qui

Fig. 1.



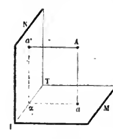
est un carré, est représentée sur le dessin par un quadrilatère irrégulier; les angles, qui sont droits, par des angles aigus ou obtus; la longueur et la largeur, qui sont égales, sont figurées par des longueurs très-différentes. Le côté qui est vu en raccourci est beaucoup plus petit que l'autre. Ainsi, le dessin ordinaire, bien qu'atteignant parfaitement son but, qui est, comme nous l'avons dit, de produire dans l'œil l'image des objets, est tout à fait insuffisant quand il s'agit d'une machine ou d'un bâtiment dont on veut représenter exactement les diverses

parties. Un dessin ordinaire donnera bien l'idée générale du bâtiment ou de la machine; en cela il est excellent. Mais ce que l'architecte et l'ingénieur se proposent avant tout, c'est de faire un dessin sur lequel on puisse, avec un compas, prendre la mesure exacte de toutes les parties, et à l'aide duquel on puisse par conséquent construire la machine ou le bâtiment avec toute la précision possible. On a recours pour cela à la méthode des projections.

Représentation d'un point par ses projections.

2. On sait que l'on appelle *projection* d'un point sur un plan le pied de la perpendiculaire abaissée du point sur le plan. Ainsi la projection du point A sur un point horizontal LM est le pied *a* de la perpendiculaire A*a*, abaissée du point A sur ce plan (fig. 2).

Fig. 2.



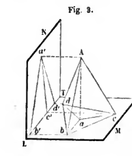
Mais la projection *a* sur le plan horizontal ne suffit pas pour déterminer complétement la position du point A dans l'espace; elle apprend seulement que le point A est situé sur la perpendiculaire indéfinie élevée au point *a*.

Pour déterminer complétement la position du point A, on fait usage de deux plans de projection, que l'on choisit ordinairement perpendiculaires entre eux, l'un horizontal LM, l'autre vertical LN. On se représentera très-bien les deux plans de projection, en supposant que l'un, le plan horizontal, soit le sol ou le plancher de la chambre dans laquelle on est placé, l'autre un mur vertical. L'intersection LT des deux plans de projection, ou la trace du mur vertical sur le sol, porte le nom de *ligne de terre*. Si l'on projette le point A sur ces deux plans, au moyen des perpendiculaires A*a* et A*a'*, les deux projections *a* et *a'* détermineront complétement la position du point A dans l'espace; car ce point, devant se trouver à la fois sur la perpendiculaire élevée par le point *a* au plan horizontal et sur la per-

pendiculaire menée par le point a' au plan vertical, sera à l'intersection de ces deux droites, et par conséquent sera parfaitement déterminé.

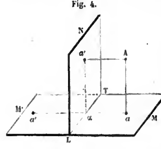
Il en est de même d'un corps quelconque. Considérons, par exemple, une pyramide triangulaire, dont la base bcd repose sur le plan horizontal (fig. 3) ; le sommet A se projette en a et a'. La base bcd, située dans le plan horizontal et les deux projections a et a' du sommet A déterminent complétement la pyramide. Les trois arêtes latérales Ab, Ac, Ad de la pyramide ont pour projections, sur le plan horizontal les droites ab, ac, ad, sur le plan vertical les droites $a'b'$ $a'c'$, $a'd'$.

Fig. 3.



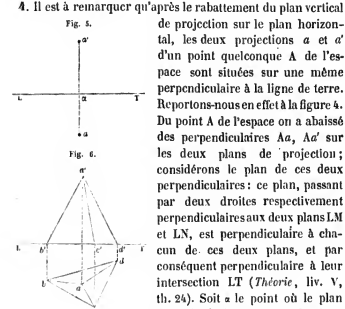
3. En général, un corps quelconque sera représenté par deux figures planes tracées sur les deux plans de projection. Afin de pouvoir tracer ces deux figures sur une même feuille de papier, on suppose que la feuille de papier coïncide avec le plan horizontal LM ; puis on imagine que le plan vertical LN tourne autour de la ligne de terre LT pour se rabattre sur le plan horizontal en LM' (fig. 4) de l'autre côté de la ligne de terre. Dans ce mouvement du plan vertical, le point a', projection verticale du point A de l'espace, décrit un quart de cercle et vient se placer en a' dans le plan horizontal ; les deux projections a et a' du point A de l'espace sont alors marquées sur la même feuille de papier, comme le montre la figure 5. De même, les deux projections de la pyramide triangulaire, étant amenées dans le même plan, pour-

Fig. 4.



ront être placées sur la même feuille de papier (fig. 6), et constitueront l'*épure* du corps que l'on veut représenter.

4. Il est à remarquer qu'après le rabattement du plan vertical de projection sur le plan horizontal, les deux projections a et a' d'un point quelconque A de l'espace sont situées sur une même perpendiculaire à la ligne de terre. Reportons-nous en effet à la figure 4. Du point A de l'espace on a abaissé des perpendiculaires Aa, Aa' sur les deux plans de projection; considérons le plan de ces deux perpendiculaires : ce plan, passant par deux droites respectivement perpendiculaires aux deux plans LM et LN, est perpendiculaire à chacun de ces deux plans, et par conséquent perpendiculaire à leur intersection LT (*Théorie*, liv. V, th. 24). Soit α le point où le plan dont il s'agit rencontre la ligne

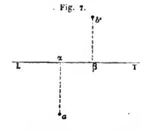


de terre LT; ce plan coupe les deux plans de projection suivant deux droites αa, $\alpha a'$, qui sont toutes deux perpendiculaires à la ligne LT, puisque cette ligne est perpendiculaire au plan $A\alpha$, qui contient ces deux droites. Quand on fait tourner le plan vertical LN autour de la ligne de terre LT pour le rabattre sur le plan horizontal, la droite $\alpha a'$ reste perpendiculaire à LT, et se place dans le plan horizontal suivant le prolongement de la perpendiculaire $a\alpha$. Ainsi, dans l'épure, les deux projections a et a' d'un même point de l'espace sont situées sur une même perpendiculaire à la ligne de terre (fig. 5).

Une autre remarque non moins importante, c'est que la longueur $a'\alpha$ sur l'épure indique à quelle hauteur le point A est situé au-dessus du plan horizontal, et la longueur $a\alpha$ à quelle dis-

tance en avant du plan vertical. En effet, la figure $Aa\alpha a'$ (fig. 4) est un rectangle; la perpendiculaire Aa, qui est égale à $a'\alpha$, mesure l'élévation du point A au-dessus du plan horizontal LM; la perpendiculaire Aa', qui est égale à $a\alpha$, mesure de même la distance du point A en avant du plan vertical.

5. Réciproquement, deux points a et a' de l'épure, situés sur une même perpendiculaire $a\alpha a'$ (fig. 5) à la ligne de terre, peuvent être considérés comme étant les deux projections d'un même point de l'espace. Imaginons, en effet, que l'on relève le plan vertical en le faisant tourner autour de la ligne de terre, pour le ramener dans sa position primitive LN (fig. 4). Dans ce mouvement, la droite $\alpha a'$ reste perpendiculaire à la ligne de terre; les deux droites αa, $\alpha a'$, toutes deux perpendiculaires à la ligne de terre au point α, déterminent un plan perpendiculaire à cette ligne LT, et par conséquent perpendiculaire à chacun des deux plans de projection. Si par le point a on élève une perpendiculaire au plan LM, et par le point a' une perpendiculaire au plan LN, ces deux perpendiculaires seront contenues toutes deux dans le plan $a\alpha a'$ (*Théorie*, liv. V, th. 23); elles se rencontreront donc, et détermineront par leur intersection un point A de l'espace; ce point A admet pour projections les deux points donnés a et a'.



6. Mais, si l'on prend deux points a et b' (fig. 7) non situés sur une même perpendiculaire à la ligne de terre, ces deux points ne peuvent pas convenir pour représenter un point de l'espace. Supposons en effet les deux points a et b' situés sur deux perpendiculaires différentes $a\alpha$, $b'\beta$ à la ligne de terre. Imaginons, comme précédemment, le plan vertical relevé et ramené à sa position primitive LN (fig. 8); les plans $a\alpha a'$, $b\beta b'$, menés par les points α et β, perpendiculairement à la ligne de terre LT, seront parallèles. Si par le point a

on élève une perpendiculaire au plan horizontal LM, et par le point b' une perpendiculaire au plan vertical LN, la première sera contenue dans le plan $a\alpha a'$, la seconde dans le plan $b\beta b'$; les deux perpendiculaires, étant situées dans des plans parallèles, ne peuvent se rencontrer. Ainsi, les deux points a et b' ne sont pas les projections d'un même point de l'espace.

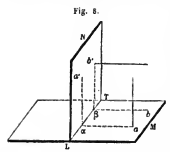


Fig. 8.

Il résulte de ce qui précède que deux points marqués au hasard dans les deux plans de projection ne représentent pas, en général, un point de l'espace. Il faut pour cela que sur l'épure ces deux points soient sur une même perpendiculaire à la ligne de terre. Il importe de bien se rappeler cette condition : elle est très-utile ; elle abrége beaucoup les opérations graphiques et sert de vérification.

7. Jusqu'ici, nous n'avons considéré que les points situés dans l'angle dièdre formé par le plan horizontal LM et le plan vertical LN ; il est facile de comprendre comment le même mode de représentation peut être étendu à tous les points de l'espace. Imaginons les deux plans de projection prolongés indéfiniment (fig. 9), le plan horizontal suivant LM' derrière la ligne de terre, le plan vertical suivant LN' au-dessous : ces deux plans formeront alors quatre angles dièdres droits comprenant tout l'espace. Afin de distinguer ces quatre angles dièdres, on

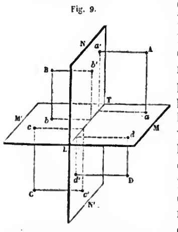


Fig. 9.

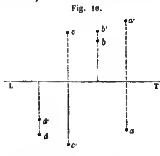
donne au premier d'entre eux, celui qui est formé par la partie antérieure LM du plan horizontal et la partie supérieure LN du plan vertical, la qualification d'*antérieur-supérieur;* le point A, situé dans ce premier angle, se projette en a et a'. Le second angle, celui qui est formé par la partie postérieure LM′ du plan horizontal et la partie supérieure LN du plan vertical, s'appelle *postérieur-supérieur;* le point B, situé dans cet angle, a pour projections b et b'. Le troisième, celui qui est formé par la partie postérieure LM′ du plan horizontal et la partie inférieure LN′ du plan vertical, s'appelle *postérieur-inférieur;* le point C, situé dans cet angle, se projette en c et c'. Enfin, le quatrième, qui est formé par la partie antérieure LM du plan horizontal et la partie inférieure LN′ du plan vertical, s'appelle *antérieur-inférieur;* le point D, situé dans ce dernier angle, a pour projections d et d'.

8. Quand on fait tourner le plan vertical autour de la ligne de terre, pour rabattre la partie supérieure LN de ce plan sur la partie postérieure LM′ du plan horizontal, comme nous l'avons expliqué précédemment, la partie inférieure LN′ du plan vertical vient en même temps s'appliquer sur la partie antérieure LM du plan horizontal. De cette manière, chaque portion de la feuille de papier, sur laquelle on construit l'épure, a une double signification; la ligne de terre LT divise ordinairement cette feuille en deux parties égales; la moitié qui est en avant représente la partie antérieure LM du plan horizontal et aussi la partie inférieure LN′ du plan vertical; l'autre moitié représente de même la partie postérieure LM′ du plan horizontal et aussi la moitié supérieure LN du plan vertical. Afin d'éviter toute confusion, on est convenu de désigner par une même lettre les deux projections d'un point, en mettant la lettre simple à la projection horizontale et la même lettre accentuée à la projection verticale.

La figure 10 représente les projections d'un point dans ces diverses positions. Les points a et a' sont les deux projections d'un point situé dans l'angle antérieur-supérieur, à 1m,50

en avant du plan vertical et à $1^m,65$ au-dessus du plan horizontal (*a* est la projection horizontale, *a'* la projection verticale *).

Fig. 10.



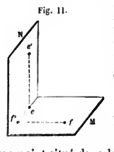
Les points *b* et *b'* sont les projections d'un point situé dans l'angle postérieur-supérieur, à $1^m,10$ en arrière du plan vertical et à $1^m,40$ au-dessus du plan horizontal (*b* est la projection horizontale, *b'* la projection verticale.)

Les points *c* et *c'* sont les projections d'un point situé dans l'angle postérieur-inférieur, à $1^m,37$ en arrrière du plan vertical et à $1^m,63$ au-dessous du plan horizontal (*c* est la projection horizontale, *c'* la projection verticale).

Enfin, *d* et *d'* sont les projections d'un point situé dans l'angle antérieur-inférieur, à $1^m,48$ en avant du plan vertical et à $1^m,05$ au-dessous du plan horizontal (*d* est la projection horizontale, *d'* la projection verticale).

On voit par là que le point dans l'espace est situé au-dessus ou au-dessous du plan horizontal, suivant que sa projection verticale est au-dessus ou au-dessous de la ligne de terre, et qu'il est en avant ou en arrière du plan vertical, suivant que sa projection horizontale est en avant ou en arrière de la ligne de terre.

Fig. 11.



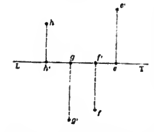
9. Remarquons encore le cas particulier où le point donné est situé dans l'un des plans de projection. Soit *e'* (fig. 11) un point situé dans le plan vertical de projection LN : il est évident que ce point *e'* est à lui-même sa projection verticale. Si de

* Cette figure et les suivantes ont été construites à l'échelle 0,01.

ce point on abaisse une perpendiculaire $e'e$ sur le plan horizontal LM, cette perpendiculaire, étant contenue tout entière dans le plan vertical LN, tombera en e sur la ligne de terre LT; le point e' situé dans le plan vertical, a donc sa projection horizontale en e, sur la ligne de terre. Considérons de même un point f situé dans le plan horizontal LM; ce point est à lui-même sa projection horizontale; si de ce point f on abaisse une perpendiculaire ff' sur le plan vertical LN, cette perpendiculaire, étant contenue dans le plan horizontal, tombera en f' sur la ligne de terre; le point f, situé dans le plan horizontal, a donc sa projection verticale en f' sur la ligne de terre.

Sur l'épure, ces deux points sont représentés comme l'indique la figure 12. Le point dont les projections sont e et e' est situé dans le plan vertical à $1^m,50$ au-dessus du plan horizontal; ce point coïncide avec sa projection verticale e'. Le point dont les projections sont f et f' est situé dans le plan horizontal à $1^m,34$ en avant du plan vertical; ce point coïncide avec sa projection horizontale. On a marqué encore deux autres points sur l'épure : le point (g, g'), situé dans le plan vertical à $1^m,60$ au-dessous du plan horizontal, et le point (h, h') situé dans le plan horizontal à $1^m,10$ en arrière du plan vertical.

Fig. 12.



Il importe, avant d'aller plus loin, de bien se familiariser avec la représentation d'un point dans toutes les positions. Un point quelconque étant désigné sur l'épure par ses deux projections, il faut que l'esprit conçoive immédiatement la position du point dans l'espace, c'est-à-dire dans quel angle il est situé et à quelles distances des deux plans de projection. C'est là le principe de la géométrie descriptive.

Traces d'un plan.

10. On représente ordinairement un plan par ses traces sur les deux plans de projection, c'est-à-dire par les droites suivant lesquelles il coupe les deux plans de projection.

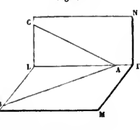


Fig. 13.

Ainsi le plan BAC (fig. 13) sera représenté par sa trace horizontale AB et sa trace verticale AC. On comprend en effet que ces deux droites déterminent complétement la position du plan.

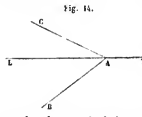


Fig. 14.

Après le rabattement du plan vertical LN sur le plan horizontal, les deux traces du plan proposé occupent sur l'épure la position indiquée par la figure 14. On se rendra très-bien compte de la position du plan en imaginant le plan vertical de projection relevé et concevant le plan qui passe par les deux traces AB et AC.

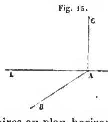


Fig. 15.

11. Examinons quelques cas particuliers. Quand un plan est perpendiculaire au plan horizontal, sa trace verticale AC (fig. 15) est perpendiculaire à la ligne de terre : car cette trace, intersection de deux plans perpendiculaires au plan horizontal, savoir, le plan vertical de projection et le plan proposé, est perpendiculaire à ce même plan et par conséquent perpendiculaire à la ligne de terre LT. L'angle plan BAL mesure l'angle dièdre que forme le plan proposé avec le plan vertical de projection, angle dont l'arête est AC.

De même, quand un plan est perpendiculaire au plan ver-

tical de projection, sa trace horizontale AB (fig. 16) est perpendiculaire à la ligne de terre : car cette trace, intersection de deux plans perpendiculaires au plan vertical, savoir, le plan horizontal et le plan proposé, est perpendiculaire à ce même plan et par conséquent perpendiculaire à la ligne de terre LT. L'angle plan CAT mesure l'inclinaison du plan proposé sur le plan horizontal. Quand un plan est perpendiculaire à la fois aux deux plans de projection, et par suite à la ligne de terre, ses deux traces sont perpendiculaires à la ligne de terre.

Fig. 16.

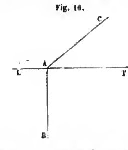
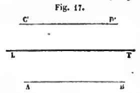


Fig. 17.



Si le plan proposé devient parallèle à la ligne de terre, le point où il coupe la ligne de terre s'éloigne à l'infini, et ses traces AB, C'D' (fig. 17) deviennent toutes deux parallèles à la ligne de terre.

Fig. 18.

C' D'

L T

Si le plan devient parallèle au plan horizontal, sa trace horizontale, s'éloignant à l'infini, disparaît ; il n'y a plus qu'une trace, la trace verticale C'D' (fig. 18), qui est parallèle à la ligne de terre, et dont la distance à cette ligne mesure la distance du plan proposé au plan horizontal.

Fig. 19.

L T

A B

De même, lorsque le plan devient parallèle au plan vertical de projection, sa trace verticale, s'éloignant à l'infini, disparaît ; il n'y a plus qu'une trace, la trace horizontale AB (fig. 19), qui est parallèle à la ligne de terre, et dont la distance à cette ligne mesure la distance du plan proposé au plan vertical.

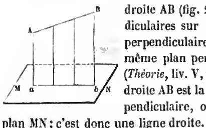
Il est un cas où les traces d'un plan ne le déterminent pas complétement, c'est lorsque le plan passe par la ligne de terre. Alors les deux traces coïncident avec la ligne de terre, et le plan peut

tourner à volonté autour de cette ligne. Pour achever la détermination du plan on pourra se donner un point de ce plan par ses projections.

Projections d'une droite.

12. On appelle en général projection d'une ligne sur un plan le lieu des projections des différents points de cette ligne. Lorsque la ligne est droite, il est aisé de voir que sa projection est droite : car, si des différents points d'une droite AB (fig. 20) on abaisse des perpendiculaires sur un plan MN, toutes ces perpendiculaires sont situées dans un même plan perpendiculaire au plan MN (*Théorie*, liv. V, th. 23); la projection de la droite AB est la trace *ab* de ce plan perpendiculaire, ou plan projetant, sur le plan MN ; c'est donc une ligne droite.

Fig. 20.



En géométrie descriptive, on représente une droite par ses deux projections *ab*, *a'b'* sur les deux plans fixes (fig. 21 et 22).

Fig. 21.

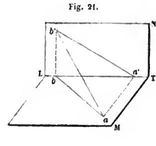
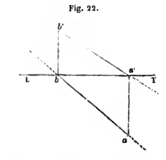


Fig. 22.



Si par la projection horizontale *ab* on mène un plan perpendiculaire au plan horizontal LM, et par la projection verticale *a'b'* un plan perpendiculaire au plan vertical LN, l'intersection de ces deux plans projetants donnera la droite dans l'espace.

Traces d'une droite.

13. On appelle *trace* d'une droite sur l'un des plans de projection le point où elle perce ce plan. Quand on connaît les projections d'une droite sur les deux plans, il est facile de trouver ses traces.

Soient *ab*, *a'b'* (fig. 22) les deux projections de la droite. Si par la projection horizontale *ab* on élève un plan perpendiculaire au plan horizontal de projection, ce plan aura pour trace horizontale la droite *ab*, et pour trace verticale la droite *bb'*, perpendiculaire à la ligne de terre, puisqu'il est perpendiculaire au plan horizontal. De même, si par la projection verticale *a'b'* on mène un plan perpendiculaire au plan vertical de projection, ce plan aura pour trace verticale la droite *a'b'*, et pour trace horizontale la droite *a'a* perpendiculaire à la ligne de terre. L'intersection des deux plans projetants *abb'*, *aa'b'* donne la droite proposée. Or, les traces horizontales *ba*, *a'a* de ces deux plans se coupent au point *a*; ce point appartient à la droite d'intersection; il est situé dans le plan horizontal; c'est donc la trace horizontale de la droite, c'est-à-dire le point où elle perce le plan horizontal. De même les traces verticales *bb'*, *a'b'* des deux plans projetants se coupent au point *b'*; ce point, appartenant à la droite d'intersection et étant situé dans le plan vertical, est la trace verticale de la droite, c'est-à-dire le point où elle perce le plan vertical de projection.

Ainsi, *pour avoir la trace horizontale d'une droite, prolongez la projection verticale jusqu'à sa rencontre en* a' *avec la ligne de terre; en ce point élevez une perpendiculaire* a'a *à la ligne de terre; le point* a, *où cette perpendiculaire rencontre la projection horizontale, est la trace horizontale de la droite. De même, pour avoir la trace verticale, prolongez la projection horizontale jusqu'à sa rencontre en* b *avec la ligne de terre; en ce point, élevez une perpendiculaire* bb' *à la ligne de terre; le point* b', *où cette perpendiculaire rencontre la projection verticale, est la trace verticale de la droite.*

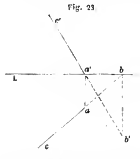
Réciproquement, quand on connaît les deux traces d'une

droite, on obtient facilement ses projections. La trace horizontale a se projette en a', la trace verticale b' en b, sur la ligne de terre. On connaît ainsi deux points de la droite par leurs projections ; il suffit de mener les droites ab, $a'b'$.

14. Dans l'exemple précédent, la portion ab' de la droite comprise entre les deux traces est située dans l'angle antérieur-supérieur. Pour un observateur placé dans ce premier angle, cette partie est visible, on l'a marquée en ligne pleine ; le prolongement au-dessous du plan horizontal, ou en arrière du plan vertical, étant invisible, est marqué en ligne ponctuée.

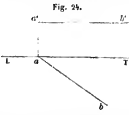
Dans la figure 23, la portion de la droite comprise entre la trace horizontale a et la trace verticale b', est située dans l'angle antérieur-inférieur ; cette partie, étant invisible, a été ponctuée, tandis que la partie indéfinie ac, $a'c'$, située dans l'angle antérieur-supérieur, est visible et marquée en ligne pleine.

Fig. 23



15. Lorsqu'une droite est parallèle au plan horizontal, le plan qui la projette sur le plan vertical étant parallèle au plan horizontal, sa projection verticale $a'b'$ (fig. 24) est parallèle à la ligne de terre. La trace horizontale de la droite s'est éloignée à l'infini. Quant à la trace verticale a', on l'obtient, comme à l'ordinaire, en prolongeant la projection horizontale ab jusqu'à la ligne de terre et élevant au point a une perpendiculaire à la ligne de terre. On se représentera la droite en imaginant le plan vertical relevé et concevant par le point a' une parallèle à la projection horizontale ab.

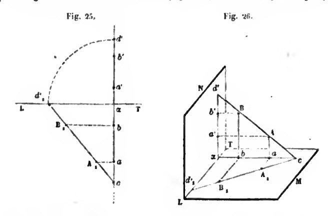
Fig. 24.



Quand la droite est parallèle à la ligne de terre, ses deux pro-

jections sont parallèles à la ligne de terre, et ses deux traces se sont éloignées à l'infini.

16. Il est un cas où la droite n'est pas complétement définie par ses deux projections ; c'est lorsqu'elle est située dans un plan perpendiculaire à la ligne de terre. Alors les deux projections *ab*, *a'b'* sont perpendiculaires à la ligne de terre et sur le prolongement l'une de l'autre (fig. 25); les deux plans proje-

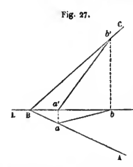


tants coïncident, et il y a indétermination. Dans ce cas, on pourra définir la droite en se donnant deux de ses points (a, a'), (b, b') par leurs projections. Proposons-nous de trouver les traces de la droite. Cette droite est située dans un plan $c\alpha d'$ perpendiculaire à la ligne de terre; faisons tourner ce plan autour de sa trace horizontale αc pour le rabattre sur le plan horizontal (voyez la figure 26, qui aidera à comprendre le raisonnement); le point A est situé sur une verticale aA élevée au point a et à une hauteur au-dessus du plan horizontal égale à $\alpha a'$; dans le mouvement du plan, cette droite aA reste perpendiculaire à αc et se rabat suivant une droite aA_1, perpendiculaire à αc; sur cette droite, on prendra une longueur aA_1 égale à $\alpha a'$, et l'on aura le rabattement A_1 du point A de la droite proposée. De même, le point B est situé sur une verticale bB, élevée en b et à une hauteur égale à $\alpha b'$; cette droite bB se rabat suivant une

droite bB_1, perpendiculaire à αc et égale à $\alpha b'$; on a ainsi le rabattement B_1 d'un second point B de la droite. Si l'on joint les deux points A_1 et B_1, on aura le rabattement de la droite proposée.

Prolongeons la droite A_1B_1 rabattue jusqu'à sa rencontre, d'une part en c avec la projection horizontale αc, d'autre part en d'_1 avec la ligne de terre LT. Concevons maintenant qu'on relève le plan projetant en le faisant tourner autour de αc, pour ramener la droite à sa vraie position dans l'espace. Dans ce mouvement, le point c, qui est sur l'axe de rotation, reste immobile, et la droite décrit un cône dont le point c est le sommet; la droite perce donc le plan horizontal au point c; ce point est la trace horizontale. D'autre part, le point d'_1 décrit dans le plan vertical un quart de cercle d'_1d' ayant α pour centre, et vient se placer en d'; la droite perce donc le plan vertical au point d'; ce point est la trace verticale.

Reconnaître si une droite est située dans un plan donné.



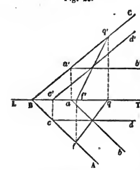
17. Lorsqu'une droite est située dans un plan donné, il est clair que la trace de la droite sur l'un quelconque des plans de projection appartient à la trace du plan. Réciproquement, lorsque les traces d'une droite sur les deux plans de projection appartiennent respectivement aux traces d'un plan, la droite, ayant deux points dans le plan, est située tout entière dans ce plan. Ainsi, la droite (ab, $a'b'$) est située dans le plan ABC (fig. 27), puisque les traces a et b' de la droite appartiennent respectivement aux traces du plan.

Droites situées dans un plan donné et parallèles à l'un des plans de projection.

18. Parmi les droites situées dans un même plan, il est bon de remarquer celles qui sont parallèles à l'un des plans de projection. Considérons d'abord une droite parallèle au plan horizon-

tal. On sait (nº 15) que la projection verticale $a'b'$ de la droite est parallèle à la ligne de terre (fig. 28); la projection horizontale ab est parallèle à la trace horizontale BA du plan donné; car les deux droites ab et BA, intersections du plan horizontal par deux plans menés par la droite donnée, sont parallèles à cette droite, et par conséquent parallèles entre elles (*Théorie*, liv. V, th. 12). Réciproquement, lorsqu'une droite horizontale a sa trace verticale a' sur la trace verticale d'un plan ABC, et sa projection horizontale ab parallèle à la trace horizontale BA du plan, elle est contenue dans ce plan; car elle a un point a' dans le plan et elle est parallèle à la droite ab et par suite à la droite BA située dans le plan.

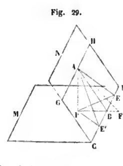
Fig. 28.



De même, une droite parallèle au plan vertical et qui a par conséquent sa projection horizontale cd parallèle à la ligne de terre, est contenue dans le plan ABC, lorsqu'elle a sa trace horizontale c située sur la trace horizontale du plan et sa projection verticale $c'd'$ parallèle à la trace verticale BC du plan.

Ligne de plus grande pente.

Fig. 29.



19. Parmi les droites qu'on peut mener par un point dans un plan, celle qui fait avec le plan horizontal l'angle le plus grand s'appelle ligne de *plus grande pente.*

Soit M le plan horizontal, N un plan quelconque coupant le premier suivant la droite CD (fig. 29). Du point A, pris dans le plan N, abaissons une perpendiculaire AP sur le plan M, et du pied P menons dans le plan M une droite PB perpendiculaire

à CD; on sait que la droite AB est aussi perpendiculaire à CD. L'angle ABP qu'elle fait avec sa projection mesure l'inclinaison de cette droite sur le plan horizontal (*Théorie*, liv. V, th. 26). Je dis que la droite AB est la ligne de plus grande pente. En effet, menons par le point A dans le plan N une droite quelconque AE, l'inclinaison de cette droite sur le plan horizontal est mesurée par l'angle AEP. Si l'on fait tourner le triangle rectangle APE autour de la droite AP pour l'amener sur le plan APB, l'oblique PE étant plus grande que la perpendiculaire PB, le point E se place en F sur le prolongement de PB, et la droite AE vient en AF. L'angle ABP, extérieur au triangle ABF, est égal à la somme des deux angles AFP et BAF; il est donc plus grand que l'angle AFP. Ainsi la droite AB, qui est perpendiculaire à l'horizontale CD du plan, ou à sa parallèle GH menée par le point A, est la ligne de plus grande pente.

On peut remarquer que deux droites AE, AE′, situées dans le plan N et également inclinées sur la ligne de plus grande pente, font des angles égaux avec le plan horizontal. Si l'on imagine que la droite AE tourne autour du point A, dans le plan N, en s'écartant de plus en plus de la ligne de plus grande pente, l'angle qu'elle fait avec le plan horizontal va en diminuant d'une manière continue; lorsque cette droite coïncide avec l'horizontale GH, l'angle est nul.

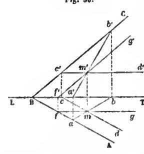
Reconnaître si un point est situé dans un plan donné.

Soit ABC (fig. 30) le plan donné, m la projection horizontale du point M de l'espace. Par le point M j'imagine une droite quelconque située dans le plan donné et ayant pour projection horizontale une droite ab passant par le point m; cette droite a pour trace horizontale l'intersection a de sa projection horizontale et de la trace horizontale du plan; elle a pour trace verticale l'intersection b' de la trace verticale du plan et de la perpendiculaire à la ligne de terre au point b où cette ligne est coupée par la projection horizontale de la droite; la projection

verticale de cette droite est donc $a'b'$; elle doit passer par le point m', projection verticale du point M.

Au lieu de mener par le point M, dans le plan ABC, une droite quelconque, il est plus simple de mener une droite parallèle à l'un des plans de projection. La droite menée par le point M, dans le plan ABC, parallèlement au plan horizontal, a pour projection horizontale la parallèle cd menée par le point m à la trace horizontale BA du plan ; sa trace verticale c' est à l'intersection de la trace verticale du plan et de la perpendiculaire à la ligne de terre au point c où cette ligne est rencontrée par la droite cd; la projection verticale de la droite est la parallèle $c'd'$ à la ligne de terre menée par le point c'; elle doit passer par le point m'. On emploierait de même la parallèle $(fg, f'g')$ au plan vertical.

Fig. 30.



Nous avons dit que, pour reconnaître qu'une droite est située dans un plan, on s'assure que les traces de la droite appartiennent respectivement aux traces du plan. Mais cette vérification est impossible lorsque les traces de la droite, ou l'une d'elles seulement, sont en dehors des limites de l'épure. Dans ce cas, on prendra deux points quelconques de la droite, et on s'assurera que ces points sont situés dans le plan, en menant par chacun d'eux une parallèle à l'une des traces du plan.

CHAPITRE II.

PROBLÈMES SUR LA LIGNE DROITE ET LE PLAN.

Distance de deux points. — Mener un plan par deux droites qui se coupent. — Par trois points non en ligne droite faire passer un plan. — Plans parallèles. — Par un point mener un plan parallèle à un plan donné. —Par un point mener un plan parallèle à deux droites données. — Trouver l'intersection de deux plans. — Trouver l'intersection d'une droite et d'un plan. — Droite perpendiculaire à un plan. — Par un point mener une droite perpendiculaire à un plan donné, et trouver la distance du point au plan. — Par un point mener un plan perpendiculaire à une droite donnée, et trouver la distance du point à la droite.

Problème I.

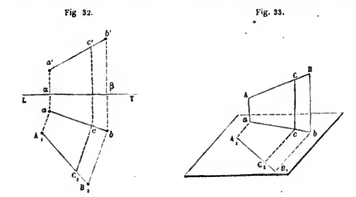
21. *Trouver la distance de deux points.*

Considérons d'abord un cas particulier très-simple, celui où la droite qui joint les deux points donnés (a, a'), (b, b') est parallèle à l'un des plans de projection, par exemple au plan vertical (fig. 31). Dans ce cas la projection horizontale ab est parallèle à la ligne de terre, et la droite AB dans l'espace est parallèle à sa projection verticale $a'b'$; elle se projette donc en vraie grandeur suivant $a'b'$.

Fig 31.

Supposons maintenant que la droite AB occupe une position quelconque dans l'espace (fig. 32). Considérons le plan vertical élevé par la projection horizontale ab; ce plan contient la droite AB; c'est le plan qui la projette sur le plan horizontal. Faisons tourner ce plan autour de la ligne ab pour le rabattre sur le plan horizontal (voyez la figure 33). Le point A est sur la verticale élevée en a, à une hauteur égale à $\alpha a'$; dans le ra-

battement, cette droite se place en aA_1, perpendiculairement à ab, dans le plan horizontal; si l'on prend aA_1 égale à $\alpha a'$, on a



le point A_1, rabattement du point A. De même, le point B est sur la verticale élevée en b à une hauteur égale à $\beta b'$; cette verticale se rabat en bB_1, perpendiculairement à ab. Si l'on joint A_1B_1, on a le rabattement de la droite AB. Telle est la distance des deux points donnés.

Problème II.

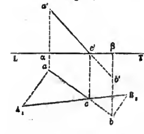
22. *Trouver sur une droite un point dont la distance à un point donné de la droite soit égale à une longueur donnée.*

Soient $(ab, a'b')$ les projections de la droite, (a, a') les projections du point donné (fig. 32), prenons un second point quelconque (b, b') sur la droite, et faisons encore tourner le plan qui projette la droite sur le plan horizontal autour de sa trace horizontale ab, pour le rabattre sur le plan horizontal. Les points A et B viennent se placer en A_1 et B_1 et la droite AB s'applique sur la droite A_1B_1. Prenons sur A_1B_1 à partir du point A_1 une longueur A_1C_1 égale à la longueur donnée, et imaginons que le plan rabattu tourne autour de ab pour reprendre sa première position; dans ce mouvement la droite cC_1 reste perpendiculaire à

ab, et quand le plan a repris sa position verticale, cette droite devient elle-même verticale, de sorte que *c* est la projection horizontale du point C. Une perpendiculaire à la ligne de terre menée par le point *c* détermine la projection verticale *c'*.

23. Remarque. Dans la figure précédente, les deux points donnés sont situés d'un même côté du plan horizontal. Supposons que le point (*a*, *a'*) soit au-dessus du plan horizontal, le point (*b*, *b'*) au-dessous (fig. 34). Si nous rabattons le plan vertical projetant, en le faisant tourner autour de *ab*, de manière que la partie supérieure de ce plan s'applique sur le plan horizontal en avant de la ligne *ab*, la verticale *a*A se rabattra suivant aA_1; mais la verticale *b*B, qui est égale à β*b'*, étant située au-dessous du plan horizontal, se rabattra en sens inverse suivant bB_1. En joignant A_1B_1, on a la distance cherchée.

Fig. 34.



Il est bon de remarquer ici que la droite AB, après son rabattement, passe toujours par sa trace horizontale *c*. Car cette droite, dans son mouvement autour de *ab*, décrit un cône dont le point *c* est le sommet; cette remarque servira de vérification.

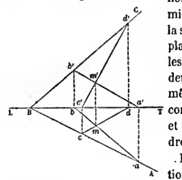
Problème III.

24. *Mener un plan par deux droites qui se coupent.*

Soient (*ab*, *a'b'*), (*cd*, *c'd'*) les deux droites données (fig. 35). Si ces droites se coupent en un point M de l'espace, ce point aura sa projection horizontale en *m*, à l'intersection des projections horizontales des droites, et sa projection verticale en *m'*, à l'intersection des projections verticales; les deux points *m* et *m'*, étant les projections d'un point M de l'espace, devront être situés sur une même perpendiculaire à la ligne de terre (nº 4); c'est

ainsi que l'on reconnaît que deux droites se coupent. Déterminons les traces *a* et *b'* de la première droite, les traces *c* et *d'* de la seconde. La trace horizontale du plan des deux droites, contenant les traces horizontales *a* et *c* des deux droites, est la droite *ac*; de même, la trace verticale du plan, contenant les traces verticales *b'* et *d'* des deux droites, est la droite *b'd'*.

Fig. 35.



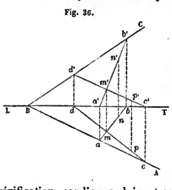
Remarquons, comme vérification, que les deux traces *ac*, *b'd'* du plan cherché ABC doivent couper la ligne de terre en un même point B.

Si l'une des droites données avait ses traces situées en dehors des limites de l'épure, on la remplacerait par une nouvelle droite ayant un point sur chacune des deux premières, et par conséquent située aussi dans le plan.

Problème IV.

25. *Par trois points non en ligne droite faire passer un plan.*

Fig. 36.



Soient (m, m'), (n, n'), (p, p') les trois points donnés (fig. 36). Le plan cherché contenant les droites $(mn, m'n')$, $(mp, m'p')$, sa trace horizontale passe par les traces horizontales *a* et *c* de ces lignes, sa trace verticale par les traces verticales *b'* et *d'* des mêmes lignes; les droites *ac*, *b'd'* sont donc les traces du plan cherché. Comme vérification, ces lignes doivent couper la ligne de terre en un même point.

Plans parallèles.

26. Les intersections (*Théorie*, liv. V, th. 15) de deux plans parallèles par un troisième étant parallèles, les traces de deux plans parallèles sur le même plan de projection sont parallèles; ainsi deux plans parallèlcs ABC, DEF (fig. 37) ont leurs tracés horizontales parallèles et leurs traces verticales parallèles.

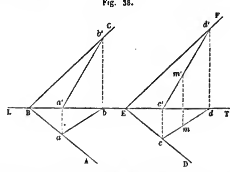
Fig. 37.

Si les plans coupent la ligne de terre, la réciproque est vraie: *Deux plans* ABC, DEF, *qui coupent la ligne de terre, et qui ont leurs traces respectivement parallèles, sont parallèles;* car si l'on imagine le plan vertical de projection relevé, les deux angles ABC, DEF, ayant leurs côtés respectivement parallèles, leurs plans sont parallèles (*Théorie*, liv. V, th. 17). Mais, quand les plans sont parallèles à la ligne de terre, leurs traces étant respectivement parallèles à la ligne de terre, sont parallèles entre elles, et cependant en général les plans ne sont pas parallèles. S'ils se coupent, la droite d'intersection est parallèle à la ligne de terre.

Problème V.

27. *Par un point mener un plan parallèle à un plan donné.*

Fig. 38.



Proposons-nous de mener par le point (m, m'), un plan pa-

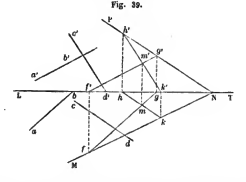
rallèle au plan ABC (fig. 38). Les traces du plan cherché étant parallèles aux traces du plan ABC, il suffit, pour les déterminer, de trouver un point de chacune d'elles. Prenons dans le plan ABC une droite quelconque (*ab*, *a'b'*); par le point (*m*, *m'*) menons une parallèle (*mc*, *m'c'*) à cette ligne; cette parallèle étant située dans le plan cherché, ses traces *c*, *d'* appartiennent aux traces du plan; si donc par les points *c* et *d'* on mène des parallèles DE, FE aux traces du plan donné, on aura les traces du plan cherché. Comme vérification, ces traces devront couper la ligne de terre en un même point.

Problème VI.

28. *Par un point mener un plan parallèle à deux droites données.*

Soient (*m*, *m'*) le point donné, (*ab*, *a'b'*), (*cd*, *c'd'*) les deux droites données (fig. 39). Par le point (*m*, *m'*) menons des paral-

Fig. 39.

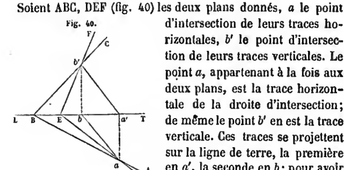


lèles (*fg*, *f'g'*), (*hk*, *h'k'*) aux deux droites données. Le plan demandé est le plan de ces deux droites; sa trace horizontale passe par les traces horizontales *f*, *k* de ces lignes, sa trace verticale par leurs traces verticales *g'*, *h'*. Comme vérification, les droites *fk*, *h'g'* doivent couper la ligne de terre en un même point.

Problème VII.

29. *Trouver l'intersection de deux plans.*

Fig. 40.

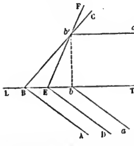


Soient ABC, DEF (fig. 40) les deux plans donnés, *a* le point d'intersection de leurs traces horizontales, *b'* le point d'intersection de leurs traces verticales. Le point *a*, appartenant à la fois aux deux plans, est la trace horizontale de la droite d'intersection; de même le point *b'* en est la trace verticale. Ces traces se projettent sur la ligne de terre, la première en *a'*, la seconde en *b*; pour avoir les projections de la droite d'intersection, il suffit de mener les droites *ab*, *a'b'*.

Cas particuliers.

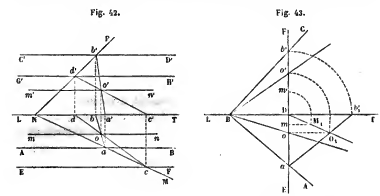
30. Supposons que les deux plans donnés ABC, DEF (fig. 41), aient leurs traces horizontales parallèles. Le point *b'*, où se coupent les traces verticales, appartient à la droite d'intersection des deux plans. Si par le point *b'* on mène une droite parallèle aux droites BA, ED, cette droite sera contenue dans chacun des deux plans donnés, et par conséquent coïncidera avec leur intersection; on en conclut que la droite d'intersection des deux plans donnés est parallèle à leurs traces horizontales; c'est donc une droite horizontale, dont la projection verticale *b'a'* est parallèle à la ligne de terre, et la projection horizontale *ba* parallèle aux traces horizontales des plans.

Fig. 41.



Ceci résulte d'ailleurs de la construction générale; car, si l'on se reporte à la figure 40, et que l'on fasse tourner la trace horizontale ED de l'un des plans autour du point E, jusqu'à ce qu'elle devienne parallèle à la trace BA de l'autre plan, le point *a* s'éloigne indéfiniment sur BA, et la projection horizontale de l'intersection devient parallèle à BA; en même temps, la projection verticale *a'* du point *a* s'éloigne indéfiniment sur la ligne de terre, et la projection verticale *b'a'* de l'intersection devient parallèle à la ligne de terre.

31. Supposons maintenant les deux plans donnés parallèles à la ligne de terre. Soient AB, C'D' les traces du premier plan, EF, G'H' celles du second (fig. 42). Les plans étant tous deux parallèles à la ligne de terre, leur intersection est parallèle à cette même ligne (*Théorie*, liv. V, th. 13); il suffit donc, pour déterminer la droite d'intersection, de trouver un de ses points. Prenons un plan auxiliaire quelconque MNP; ce plan coupe les deux plans donnés, le premier suivant la droite (*ab*, *a'b'*), le second suivant la droite (*cd*, *c'd'*); ces deux droites, étant situées dans le même plan MNP, se coupent en un un point (*o*, *o'*), qui, appartenant à la fois aux deux plans donnés, est un point de leur intersection; si par les points *o* et *o'* on mène des parallèles *mn*, *m'n'* à la ligne de terre, on aura les projections de la droite cherchée.



32. Nous examinerons enfin le cas où l'un des plans passe par la ligne de terre et un point donné (m, m'), l'autre étant un plan quelconque ABC (fig. 43). Le point B, où ce second plan coupe la ligne de terre, appartient évidemment à la droite d'intersection des deux plans ; il reste à trouver un second point de cette droite. Par le point (m, m') menons un plan EDF perpendiculaire à la ligne de terre ; ce plan coupe le plan ABC suivant la droite qui a pour traces a et b', et l'autre plan suivant la droite qui joint le point D au point M de l'espace ; ces deux droites, situées dans le même plan EDF, se coupent en un certain point O, qui, appartenant à la fois aux deux plans donnés, est un point de leur intersection. Pour trouver les projections de ce point O, je fais tourner le plan EDF autour de sa trace horizontale, pour le rabattre sur le plan horizontal ; les deux droites dont nous venons de parler, et qui sont située dans le plan, viendront se placer sur le plan horizontal, où elles se couperont en un point O_1, rabattement du point O. La trace horizontale a de la première droite, étant située sur l'axe de rotation DE, reste immobile ; la trace verticale b' décrit dans le plan vertical un arc de cercle $b'b_1'$, dont le point D est le centre, et Db' le rayon ; quand le plan EDF est rabattu sur le plan horizontal, ce point se place sur la ligne de terre en b_1', et la droite rabattue est ab_1'. Le point D de la seconde droite, étant sur l'axe de rotation DE, reste immobile ; voyons ce que devient le point M : ce point est situé sur la verticale mM, élevée au point m, et à une hauteur au-dessus du plan horizontal égale à Dm' ; dans le mouvement du plan, cette droite mM reste perpendiculaire à DE, et se rabat suivant une droite mM_1, perpendiculaire à DE, et égale à Dm' ; la droite DM se rabat donc suivant DM_1. Les deux droites rabattues se coupent au point O_1, rabattement du point O. Si maintenant on fait tourner le plan rabattu autour de la droite DE, pour le ramener à sa première position, la droite oO_1, perpendiculaire à la droite DE, reste perpendiculaire à cette droite, et se place dans le plan EDF perpendiculaire au plan horizontal ; elle devient donc verticale, et se projette sur le plan vertical suivant une droite Do' perpendiculaire à la ligne de terre et égale à oO ;

le point O de l'espace a donc pour projection o et o'. La droite d'intersection demandée, passant par les points B et O, a pour projection Bo, Bo'.

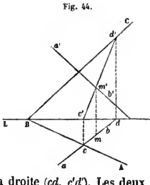
33. Remarque. La méthode générale, pour trouver l'intersection de deux plans, consiste à chercher deux points de cette droite. Dans le cas général, lorsque les traces des plans se coupent respectivement dans les limites de l'épure, on a de suite les traces de la droite cherchée. Si les traces des plans ne se rencontraient pas dans les limites de l'épure, on couperait les deux plans par un plan auxiliaire convenablement choisi, le point commun aux deux droites d'intersection serait un point de la ligne cherchée. Un second plan auxiliaire donnerait un autre point de cette même ligne.

Problème VIII.

34. *Trouver le point d'intersection d'une droite et d'un plan.*

Pour résoudre ce problème, par la droite donnée on fait passer un plan quelconque, on cherche la droite suivant laquelle ce plan coupe le plan donné; cette droite et la droite donnée, étant situées toutes deux dans le plan auxiliaire, se rencontrent, et leur point d'intersection, appartenant à la fois à la droite donnée et au plan donné, est le point où cette droite perce le plan.

Fig. 44.



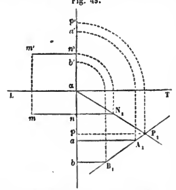
Soit ABC le plan donné, (ab, $a'b'$) la droite donnée (fig. 44). Considérons le plan qui projette la droite donnée sur le plan horizontal; ce plan a pour trace horizontale ab, et pour trace verticale la perpendiculaire dd' à la ligne de terre au point où la droite ab rencontre cette ligne; il coupe le plan donné suivant la droite (cd, $c'd'$). Les deux droites (ab, $a'b'$), (cd $c'd'$), situées

dans le même plan vertical cdd', se rencontrent en un point, qui a pour projection verticale le point de rencontre m' des projections verticales des deux lignes, et pour projection horizontale le point d'intersection m de la projection horizontale commune cd des deux lignes et de la perpendiculaire à la ligne de terre menée par le point m'. On a ainsi le point (m, m') où la droite donnée perce le plan donné.

Cas particulier.

53. Considérons en particulier le cas où le plan donné passe par la ligne de terre et le point (m, m'), et où la droite donnée est située dans un plan perpendiculaire à la ligne de terre et passe par les deux points (a, a'), (b, b') (fig. 45). Le plan mené par la droite donnée, perpendiculairement à la ligne de terre, a pour traces αa, $\alpha a'$. Cherchons d'abord l'intersection de ce plan et du plan donné. Le point α appartient aux deux plans; la droite menée par le point (m, m'), parallèlement à la ligne de terre, et qui est contenue dans le plan donné, perce le plan $a\alpha a'$ en un point (n, n') qui appartient aussi aux deux plans; leur intersection est donc la droite αN. Cette droite et la droite donnée, étant situées toutes deux dans le même plan $a\alpha a'$, se coupent en un point qui est évidemment le point cherché. Pour trouver le point d'intersection de ces deux droites, je fais tourner le plan $a\alpha a'$ autour de sa trace horizontale $a\alpha$, pour le rabattre sur le plan horizontal; la droite qui passe par les points (a, a'), (b, b') se rabat suivant A_1B_1; la droite αN se rabat suivant αN_1; les droites rabattues se coupent au point P_1, qui, lorsque le plan rabattu est ramené à sa première position, se projette en (p, p'); le point (p, p') est le point cherché.

Fig. 45.

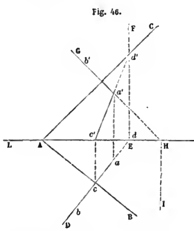


Droite perpendiculaire à un plan.

36. Nous démontrerons d'abord que, *lorsqu'une droite est perpendiculaire à un plan, les projections de la droite sont respectivement perpendiculaires aux traces du plan.*

Supposons que la droite (ab, $a'b'$) soit perpendiculaire au plan BAC (fig. 46). Le plan DEF, qui projette la droite sur le plan horizontal, passant par une droite perpendiculaire au plan BAC, est lui-même perpendiculaire à ce plan (*Théorie*, liv. V, th. 25); il est d'ailleurs perpendiculaire au plan horizontal de projection; ce plan projetant, étant perpendiculaire à la fois au plan horizontal et au plan BAC, est perpendiculaire à la ligne d'intersection AB de ces deux plans (*Théorie*, liv. V, th. 24); la projection horizontale ab, qui est située dans ce plan projetant, est donc perpendiculaire à la ligne AB.

Fig. 46.



On démontrera de la même manière que la projection verticale $a'b'$ est perpendiculaire à la trace verticale AC du plan. Le plan GHI, qui projette la droite sur le plan vertical, étant à la fois perpendiculaire au plan vertical et au plan proposé, est perpendiculaire à la ligne d'intersection AC de ces deux plans, et la droite $a'b'$, qui est située dans ce plan, est elle-même perpendiculaire à AC.

37. Réciproquement, *lorsque les deux projections d'une droite sont respectivement perpendiculaires aux traces d'un plan, la droite est perpendiculaire au plan.*

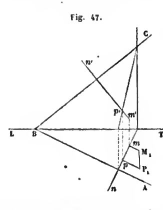
Nous supposons la projection horizontale ab de la droite per-

pendiculaire à la trace horizontale AB du plan, et la projection verticale $a'b'$ perpendiculaire à la trace verticale AC. Le plan projetant DEF est perpendiculaire au plan horizontal; la droite AB, qui, située dans le plan horizontal, est perpendiculaire à la ligne d'intersection ab des deux plans, est perpendiculaire au plan DEF (*Théorie*, liv. V, th. 22); le plan BAC, passant par la droite AB, est lui-même perpendiculaire au plan DEF. Par la même raison, le plan BAC est perpendiculaire au second plan projetant GHI. Ainsi, les deux plans projetants DEF, GHI sont tous deux perpendiculaires au plan BAC; la droite proposée, qui est l'intersection de ces deux plans projetants, est elle-même perpendiculaire au plan BAC.

Il y a cependant un cas où la réciproque n'est pas vraie; c'est lorsque le plan est parallèle à la ligne de terre; dans ce cas la droite n'est pas définie par ses deux projections.

Problème IX.

38. *Par un point mener une droite perpendiculaire à un plan donné, et trouver la distance du point au plan.*



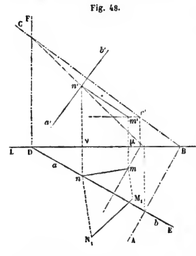
Pour avoir les projections de la perpendiculaire abaissée du point (m, m') sur le plan ABC (fig. 47), il suffit de mener par les projections du point des droites mn, $m'n'$ respectivement perpendiculaires aux traces du plan. On déterminera ensuite le point (p, p') où cette perpendiculaire perce le plan, par la méthode expliquée au n° **34**, et enfin on cherchera la distance des deux points (m, m'), (p, p'), comme nous l'avons expliqué au n° **21**.

Problème X.

39. *Par un point mener un plan perpendiculaire à une droite donnée, et trouver la distance du point à la droite.*

Soient (m, m') le point donné (ab, $a'b'$), la droite donnée (fig. 48). Le plan mené par le point (m, m') perpendiculairement à la droite donnée a ses traces respectivement perpendiculaires aux projections ab, $a'b'$ de la droite. Concevons dans ce plan une horizontale menée par le point (m, m'); elle a pour projection verticale une parallèle à la ligne de terre menée par le point m', et pour projection horizontale une parallèle à la trace horizontale du plan, ou, ce qui revient au même, une perpendiculaire menée par le point m à la projection horizontale ab de la droite donnée. Cherchons la trace verticale c' de cette ligne; c'est un point de la trace verticale du plan. Nous obtiendrons cette trace en menant par le point c' une droite BC perpendiculaire à $a'b'$; nous aurons ensuite la trace horizontale en menant par le point B, où la trace verticale coupe la ligne de terre, une droite BA perpendiculaire à ab.

Fig. 48.

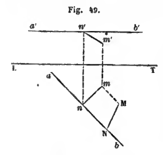


Déterminons maintenant le point (n, n') où le plan ABC coupe la droite donnée (n° 34); joignons ce point au point donné, la droite (mn, $m'n'$) ainsi obtenue sera la perpendiculaire abaissée du point donné sur la droite donnée. La longueur M_1N_1 de cette perpendiculaire est la distance du point à la droite.

Cas particuliers.

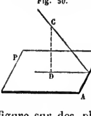
40. Supposons que la droite soit parallèle à l'un des plans de projection, par exemple au plan horizontal. Le plan mené par le point M perpendiculairement à la droite horizontale AB est perpendiculaire au plan horizontal (fig. 49), sa trace horizontale est la perpendiculaire mn menée à la droite ab. Il est évident que cette droite mn est la projection horizontale de la perpendiculaire demandée ; la projection verticale est $m'n'$.

Fig. 49.



41. Remarque. En général, la projection d'un angle droit n'est pas un angle droit ; cependant, quand l'un des côtés de l'angle droit est parallèle au plan de projection, la projection est aussi un angle droit. C'est ce qu'on voit sur la figure précédente ; mais il est bon de le démontrer directement. Soit ABC, un angle, dont un côté AB est parallèle au plan de projection (fig 50) ; comme les projections d'une figure sur des plans parallèles sont égales, on peut supposer que le plan de projection P passe par la droite AB. Par le point B menons un plan perpendiculaire à la droite AB ; ce plan sera perpendiculaire au plan P et coupera le plan P suivant une droite BD perpendiculaire à BA ; donc l'angle ABD, projection de ABC, est droit.

Fig. 50.



CHAPITRE III.

SUITE DES PROBLÈMES SUR LA LIGNE DROITE ET LE PLAN.

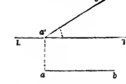
Angles d'une droite avec les plans de projection. — Angle de deux droites, — Angle d'une droite et d'un plan. — Angle d'un plan avec les plans de projection. — Angle de deux plans. — Plus courte distance de deux droites.

PROBLÈME XI.

42. *Trouver les angles d'une droite avec les plans de projection.*

On appelle angle d'une droite avec un plan l'angle que fait la droite avec sa projection sur le plan (*Théorie*, liv. V, th. 26).

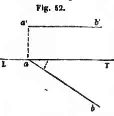
Fig. 51.



Lorsque la droite (ab, $a'b'$) est parallèle au plan vertical de projection (fig. 51), elle fait avec sa projection horizontale ab un angle situé dans un plan parallèle au plan vertical, et qui par conséquent se projette sur ce plan en vraie grandeur suivant $b'a'$T ; tel est l'angle de la droite avec le plan horizontal. Quant à l'angle avec le plan vertical, il est évidemment nul.

De même, quand la droite est parallèle au plan vertical de projection (fig. 52), l'angle qu'elle fait avec sa projection verticale $a'b'$, étant situé dans un plan horizontal, se projette en vraie grandeur sur le plan horizontal suivant baT; tel est l'angle de la droite avec le plan vertical. L'angle avec le plan horizontal est nul.

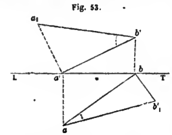
Fig. 52.



Considérons maintenant une droite quelconque (fig. 53). L'angle de la droite avec sa projection horizontale ab est situé

dans le plan projetant abb'; rabattons ce plan sur le plan horizontal, en le faisant tourner autour de ab; la ligne bb', perpendiculaire à l'axe, se rabat suivant une ligne égale bb'_1, aussi perpendiculaire à l'axe, et le point b' vient en b'_1; d'ailleurs, la trace a, située sur l'axe, reste immobile; ainsi la droite proposée s'applique en ab_1'; l'angle de la droite avec le plan horizontal, c'est-à-dire avec ab, est donc bab'_1.

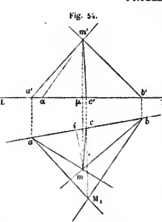
Fig. 53.



De même, l'angle de la droite avec sa projection verticale $b'a'$, est situé dans l'autre plan projetant $b'a'a$; si l'on fait tourner ce plan autour de $b'a'$, pour le rabattre sur le plan vertical, la ligne $a'a$, perpendiculaire à l'axe, se rabat suivant une ligne égale $a'a_1$, aussi perpendiculaire à l'axe, et le point a vient en a_1; d'ailleurs la trace b', située sur l'axe, reste immobile; ainsi, la droite proposée s'applique en $b'a_1$; l'angle de la droite avec le plan vertical est donc $a'b'a_1$.

Problème XII.

Fig. 54.



43. *Trouver l'angle de deux droites.*

Si les deux droites sont parallèles à l'un des plans de projection, les angles de ces deux droites se projettent en vraie grandeur sur ce plan. Considérons deux droites quelconques $(am, a'm')$, $(bm, b'm')$, qui se coupent au point (m, m') (fig. 54); ces droites ont pour traces horizontales les points a et b, et le plan de ces deux droites a pour trace horizontale ab. Rabattons ce plan sur le

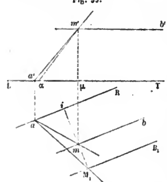
plan horizontal en le faisant tourner autour de sa trace *ab*. Les traces horizontales des deux droites, étant situées sur l'axe, restent immobiles, de sorte que, pour avoir le rabattement de ces droites, il suffit de trouver le rabattement de leur point d'intersection M. La droite M*m* étant perpendiculaire au plan horizontal, si du point *m* on mène une perpendiculaire *mi* à la droite *ab*, la droite qui dans l'espace joint le point *i* au point M est elle-même perpendiculaire à la droite *ab*. Dans le mouvement de rotation, cette droite *i*M reste perpendiculaire à la droite *ab*; elle se rabat donc dans le plan horizontal suivant une perpendiculaire à la droite *ab* menée par le point *i*, c'est-à-dire sur la droite *im* prolongée. Il s'agit de trouver la longueur de cette perpendiculaire *i*M. Cette longueur est l'hypoténuse d'un triangle rectangle *im*M, dont on connaît les deux côtés de l'angle droit, l'un *im*, l'autre *m*M égal à $\mu m'$; pour construire ce triangle, nous prendrons sur la ligne de terre une longueur $\mu\alpha$ égale à *im*; l'hypoténuse $m'\alpha$ est égale à la droite cherchée *i*M. Nous porterons ensuite cette longueur, à partir du point *i*, sur la droite *im* prolongée, ce qui nous donnera le point M_1, où se rabat le point M. Les deux droites données se rabattent suivant aM_1 et bM_1, et les angles que forment ces droites dans l'espace se trouvent ainsi rabattus sur le plan horizontal; l'un de ces angles est aM_1b, l'autre l'angle supplémentaire.

44. Proposons-nous de mener les bissectrices des angles des deux droites données. Après avoir rabattu le plan de ces droites comme nous l'avons expliqué, on mènera les bissectrices des angles rabattus, puis on ramènera le plan à sa première position. Menons, par exemple, la bissectrice M_1c de l'angle aM_1b, elle rencontre la droite *ab* au point *c*. Quand on relève le plan, le point *c*, qui est sur l'axe, reste immobile, le point M_1 vient occuper la position M dans l'espace et se projette alors en (m, m'). La bissectrice M*c*, dont la trace horizontale est *c*, a pour projections *mc*, *m'c'*.

Cas particulier.

45. Considérons le cas où l'une des droites (mb, $m'b'$) est parallèle au plan horizontal (fig. 55). La trace horizontale aR du plan des deux droites est parallèle à cette droite, et par conséquent parallèle à sa projection horizontale mb.

Fig. 55.



Si l'on rabat ce plan sur le plan horizontal en le faisant tourner autour de sa trace horizontale aR, le point M vient en M_1, la droite aM en aM_1. Quant à la seconde droite, comme elle est parallèle à l'axe de rotation, elle reste parallèle à cet axe et se rabat suivant une parallèle M_1B_1 à la droite aR.

Si les deux droites données ne se rencontraient pas, par un point de l'une on mènerait une parallèle à l'autre; c'est l'angle de ces deux droites qu'on est convenu d'appeler, dans ce cas, l'angle des droites données.

Problème XIII.

46. *Trouver l'angle d'une droite et d'un plan.*

Par un point quelconque de la droite donnée on mènera une droite perpendiculaire au plan donné; cette droite fait avec la droite donnée un angle qui est le complément de l'angle demandé; on obtiendra, comme il a été expliqué plus haut, l'angle de ces deux droites; le complément de cet angle est l'angle cherché.

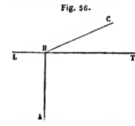
Problème XIV.

47. *Trouver les angles d'un plan avec les plans de projection.*

Considérons d'abord le cas où le plan donné ABC est perpendiculaire à l'un des plans de projection (fig. 56). Si le plan est

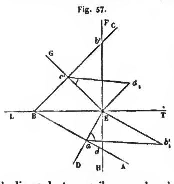
perpendiculaire au plan vertical, sa trace horizontale AB est perpendiculaire à la ligne de terre, et l'angle CBT mesure l'angle dièdre que fait ce plan avec le plan horizontal; car le plan de cet angle, c'est-à-dire le plan vertical de projection, est perpendiculaire à l'arête AB de l'angle dièdre.

Fig. 56.



Considérons maintenant un plan quelconque ABC (fig. 57). Cherchons l'angle que fait ce plan avec le plan horizontal. Pour cela, nous mènerons un plan perpendiculaire à la trace horizontale du plan donné; ce plan coupera le plan donné et le plan horizontal suivant deux droites faisant entre elles l'angle demandé. Le plan auxiliaire, qui est vertical, a sa trace horizontale DE perpendiculaire à AB, et sa trace verticale EF perpendiculaire à la ligne de terre; il coupe le plan horizontal suivant la droite aE, et le plan donné suivant une droite qui a pour traces les points a et b'. Il s'agit de trouver l'angle de ces deux droites. Faisons tourner le plan DEF autour de sa trace horizontale DE, pour le rabattre sur le plan horizontal; la droite Eb', perpendiculaire à l'axe de rotation aE, se rabat suivant la droite Eb_1', perpendiculaire à l'axe et égale à Eb_1, et l'angle cherché se rabat suivant Eab_1'. De même, pour trouver l'angle que fait le plan donné avec le plan vertical, menons un plan GEH perpendiculaire à la trace verticale BC du plan donné. L'angle cherché est l'angle des droites d'intersection du plan auxiliaire avec le plan vertical et le plan donné; en faisant tourner ce plan auxiliaire autour de sa trace verticale pour le rabattre sur le plan vertical, on obtient l'angle rabattu E$c'd_1$.

Fig. 57.



Problème XV.

48. *Trouver l'angle de deux plans.*

Il est un cas où l'on a immédiatement l'angle des deux plans, c'est lorsque ces plans sont tous deux perpendiculaires à l'un des plans de projection. Soient les deux plans ABC, DEF (fig. 58), tous deux perpendiculaires au plan vertical; les angles dièdres formés par ces plans sont mesurés par les angles de leurs traces verticales BC, EF.

Fig. 58.

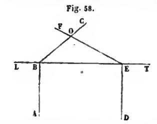
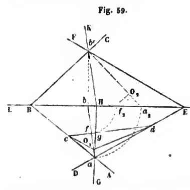


Fig. 59.



Considérons maintenant deux plans quelconques ABC, DEF (fig. 59), Nous les couperons par un plan perpendiculaire à leur intersection; ce plan a sa trace horizontale *cd* perpendiculaire à la projection horizontale *ab* de l'intersection; désignons par la lettre O le point où il coupe cette droite; les angles dièdres des deux plans donnés sont mesurés par les angles que forment entre elles les droites O*c*, O*d* suivant lesquelles ces plans sont coupés par le plan perpendiculaire. Pour avoir ces angles, nous rabattrons le plan auxiliaire sur le plan horizontal, en le faisant tourner autour de sa trace horizontale *cd*. Le point O de l'intersection des deux plans à sa projection horizontale sur la projection horizontale *ab* de cette droite; la droite *ab* étant perpendiculaire au point *f* à la droite *cd*, il en résulte que la droite *f*O est aussi perpendiculaire à la

droite cd; elle se rabat donc dans la direction fa. Pour avoir la longueur de la droite fO, nous remarquerons que cette droite est perpendiculaire à la ligne d'intersection des deux plans, comme étant située dans un plan perpendiculaire à cette ligne, et nous rabattrons le plan abb' qui la contient sur le plan vertical, en le faisant tourner autour de sa trace verticale bb'. Le point a vient en a_2 sur la ligne de terre à une distance du point b égale à ba; de même le point f vient en f_2; la droite d'intersection se rabat en en $b'a_2$; quant à la droite fO, elle se rabat suivant une perpendiculaire f_2O_2, menée du point f_2 à la droite $b'a_2$; on a donc une longueur f_2O_2. Nous avons dit que, dans le premier rabattement, la droite fO prend la direction fa; si donc on porte à partir du point f dans cette direction une longueur fO_1 égale à f_2O_2, on obtient le rabattement O_1 du point O; les droites cO_1, dO_1 sont les rabattements des droites cO, dO, suivant lesquelles les plans proposés sont coupés par le plan perpendiculaire, et les angles qu'elles forment entre elles mesurent les angles dièdres de ces plans; l'un d'eux est l'angle cO_1d, l'autre l'angle supplémentaire.

49. Proposons-nous de mener les plans bissecteurs des angles dièdres formés par les plans proposés. On remarquera que ces plans passent par la droite d'intersection des plans proposés, et que les droites suivant lesquelles ils sont coupés par le plan perpendiculaire sont les bissectrices des angles formés par les droites d'intersection du plan auxiliaire avec les plans proposés. Après avoir rabattu le plan perpendiculaire et les droites d'intersection comme nous l'avons expliqué, on mènera les bissectrices des angles de ces droites, et on aura ainsi une droite située dans chacun des plans bissecteurs; comme d'ailleurs ces plans contiennent la droite d'intersection des plans donnés, chacun d'eux sera déterminé.

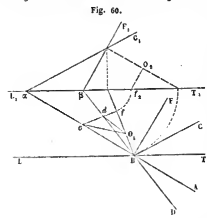
Menons, par exemple, la bissectrice O_1g de l'angle cO_1d; quand on relève le plan auxiliaire, cette droite tourne autour du point g, qui est sa trace horizontale, pour prendre la position gO dans l'espace; le plan bissecteur mené par cette droite gO a pour

trace horizontale la droite qui passe par la trace g de la droite gO et la trace a de la droite d'intersection des deux plans; il a pour trace verticale Hb'.

Cas particulier.

50. Examinons le cas où les deux plans ABC, DBF coupent la ligne de terre en un même point B (fig. 60). On peut ramener ce cas au précédent en changeant l'un des plans de projection. Concevons, par exemple, que l'on prenne un nouveau plan vertical de projection parallèle au premier et coupant le plan horizontal suivant la droite L_1T_1 parallèle à LT; dans l'épure, on imaginera que ce nouveau plan de projection est rabattu sur le plan horizontal comme le premier. Les traces d'un plan quelconque sur les deux plans verticaux parallèles sont parallèles, et quand on rabat les plans sur le plan horizontal, en les faisant tourner autour des droites parallèles LT, L_1T_1, elles restent parallèles. Ainsi, le plan ABC aura pour nouvelle trace verticale la droite αC_1 parallèle à BC, et de même le plan DBF aura pour nouvelle trace verticale la droite βF_1 parallèle à BF. On est ainsi ramené au cas précédent.

Fig. 60.



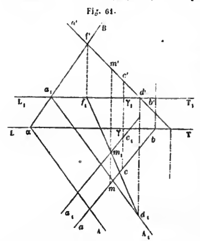
Remarque sur les constructions précédentes.

51. Nous avons résolu un certain nombre de questions sur la ligne droite et le plan; il arrive souvent qu'une construction indiquée ne peut être effectuée, parce que deux lignes dont on a à prendre l'intersection ne se rencontrent pas dans les limites de l'épure. On remédie à cet inconvénient en déplaçant l'un des

plans de projection. Il suffira ordinairement d'avancer ou de reculer le plan vertical, en laissant fixe le plan horizontal, ou bien, au contraire, d'élever ou d'abaisser le plan horizontal, en laissant fixe le plan vertical. On imagine que le plan de l'épure coïncide, dans le premier cas avec le plan horizontal, dans le second cas avec le plan vertical.

Supposons, par exemple, que l'on cherche le point d'intersection de la droite $(ab, a'b')$ et du plan $A\alpha B$ (fig. 61). La trace verticale du plan qui projette la droite sur le plan horizontal ne rencontre pas la trace verticale αB du plan donné dans les limites de l'épure, et de même la trace horizontale du plan qui projette la droite sur le plan vertical ne rencontre pas la trace horizontale αA du plan donné dans les limites de l'épure. La construction que l'on effectue d'ordinaire ne peut pas être appliquée immédiatement. Mais, si l'on déplace l'un des plans de projection, la difficulté disparaît.

Fig. 61.



Élevons le plan horizontal, en laissant fixe le plan vertical, et soit L_1T_1 la nouvelle ligne de terre; nous prenons pour plan de l'épure le plan vertical, qui est fixe. Le plan proposé a pour nouvelle trace horizontale la droite $\alpha_1 A_1$ parallèle à αA; la droite proposée a toujours pour projection verticale $a'b'$; sa nouvelle projection horizontale est parallèle à l'ancienne; pour la trouver, nous prendrons un point quelconque C de cette droite; la projection verticale de ce point est toujours c', et, comme le point C est à une distance du plan vertical égale à γc, on obtiendra la nouvelle projection horizontale c_1, en prenant $\gamma_1 c_1$ égale à γc; on obtient donc la nouvelle projection horizontale de la

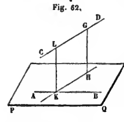
droite en menant par le point c_1 la droite c_1a_1 parallèle à ca. On appliquera maintenant la construction ordinaire; on cherchera l'intersection $(f_1d_1, f'd')$ du plan $A_1\alpha_1B$ avec le plan $f'd'd_1$, qui projette la droite donnée sur le plan vertical; le point (m_1, m'), où cette droite d'intersection rencontre la droite donnée, est le point demandé; par rapport aux plans primitifs, les projections de ce point sont (m, m').

Problème XVI.

52. *Trouver la plus courte distance de deux droites.*

On sait que la plus courte distance de deux droites AB, CD est la perpendiculaire commune à ces deux droites (*Théorie*, liv. V, th. 28). Pour construire cette perpendiculaire commune en géométrie descriptive, il est commode d'opérer de la manière suivante : par la droite AB (fig. 62) on mène un plan PQR parallèle à la droite CD; d'un point quelconque G de la droite CD on abaisse une perpendiculaire GH sur le plan PQR; par le pied H de cette perpendiculaire on mène une droite HK parallèle à CD; cette parallèle, contenue dans le plan PQR, rencontre la droite AB en un point K; par ce point on mène une droite KL parallèle à GH; cette droite KL, contenue dans le plan CGH, rencontre la droite CD en un point L. La droite KL étant parallèle à GH, est perpendiculaire au plan PQR, et par conséquent pendiculaire aux deux droites AB, KH situées dans ce plan, et aussi à la droite CD parallèle à KH; c'est donc la perpendiculaire commune demandée.

Fig. 62.



Voici comment on effectue ces constructions : les droites AB, CD sont définies par leurs projections $(ab, a'b')$, $(cd, c'd')$ (fig. 14, planche III). Par un point de la droite AB, par sa trace verticale b', par exemple, on mène une droite $(bf, b'f')$ parallèle à DC, et on construit les traces du plan PQR, qui contient les deux droites $(ab, a'b')$, $(bf, b'f')$; par un point quelconque

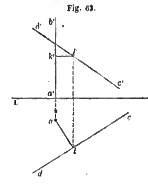
(g, g') de la droite CD on mène une perpendiculaire au plan PQR, et on détermine le point (h, h') où cette droite perce le plan. Si on demandait seulement la longueur de la perpendiculaire commune, il suffirait de déterminer la distance des points (g, g'), (h, h'), car les parallèles GH, LK sont égales.

Si l'on veut en outre les projections de la perpendiculaire commune, on mènera du point (h, h') une parallèle à la droite CD, et on cherchera le point (k, k') où cette parallèle rencontre la droite AB; de ce point (k, k') on mène une parallèle à la droite GH, et on cherche le point (l, l') où cette parallèle rencontre la droite CD. La droite $(kl, k'l')$ est la perpendiculaire commune aux deux droites données; et sa longueur K_1L_1 mesure la plus courte distance des deux droites.

Cas particuliers.

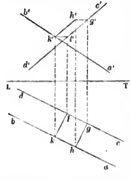
53. La construction se simplifie beaucoup quand l'une des droites est perpendiculaire à l'un des plans de projection. Si la première droite est perpendiculaire au plan horizontal, elle a pour projection horizontale un point a, et pour projection verticale une droite $a'b'$ perpendiculaire à la ligne de terre (fig. 63). La perpendiculaire commune est horizontale; l'angle droit qu'elle fait avec la seconde droite se projette sur le plan horizontal suivant un angle droit (n° **41**). Pour avoir la projection horizontale de la perpendiculaire commune, il suffit donc de mener par le point a une perpendiculaire al à la projection horizontale cd de la seconde droite; on en déduit facilement la projection verticale $l'k'$ qui est parallèle à la ligne de terre. Cette perpendiculaire commune se projette d'ailleurs en vraie grandeur sur le plan horizontal.

Fig. 63.



54. Considérons encore le cas où les projections des deux droites données sur l'un des plans de projection sont parallèles.

Fig. 64.



Supposons, par exemple, que les projections horizontales ab, cd des deux droites soient parallèles (fig. 64); le plan vertical mené par la droite AB est parallèle à la seconde droite; si donc d'un point (g, g') de la seconde droite on mène une perpendiculaire $(gh, g'h')$ à ce plan, cette droite, qui est horizontale, se projette en vraie grandeur sur le plan horizontal, et gh est la plus courte distance des deux droites données. Pour obtenir les projections kl, $k'l'$ de la perpendiculaire commune, on achèvera la construction ordinaire.

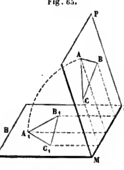
CHAPITRE IV.

DES MÉTHODES EN GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

Rabattements.

55. *Rabattre* un plan P sur un plan H, c'est faire tourner le plan P autour de la droite d'intersection MN des deux plans pour l'appliquer sur le plan H (fig. 65). Quand le plan P est rabattu sur le plan H, un point A du plan P vient en A_1 sur le plan H, et, en général, toute figure ABC.... située dans le plan P se place en $A_1B_1C_1$.... sur le plan H. Si ensuite on *relève* le plan en le faisant encore tourner autour de la droite MN, pour le ramener à sa position primitive, le point A_1 revient en A, et la figure $A_1B_1C_1$... reprend sa position primitive ABC....

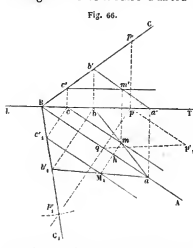
Fig. 65.



Pour déterminer les véritables dimensions d'une figure plane dont on connaît les projections, il suffit de rabattre le plan qui la contient sur l'un des plans de projection; le plan une fois rabattu, on pourra effectuer les constructions nécessaires pour déterminer de nouvelles parties de la figure; en relevant ensuite le plan, on en déterminerait les projections. C'est ainsi que nous avons opéré pour trouver la distance de deux points donnés par leurs projections (**21**), et pour porter une longueur donnée à partir d'un point donné sur une droite définie par ses projections (**22**); nous avons rabattu sur le plan horizontal un plan mené par la droite perpendiculairement au plan horizontal. C'est encore de cette manière que nous avons déterminé l'angle de deux droites (**43**); nous avons rabattu le plan de ces deux droites sur le plan horizontal. Mais il est bon de reprendre en détail les opérations nécessaires pour effectuer un rabattement.

56. Quand on veut rabattre un plan ABC sur le plan horizontal, en le faisant tourner autour de sa trace horizontale AB, il est avantageux de construire d'abord le rabattement de la trace verticale BC (fig. 66). Soit p' un point de cette trace; menons du point p' une perpendiculaire $p'p$ à la ligne de la terre, et du point p une perpendiculaire pq à la trace horizontale AB du plan. La droite qui joint le point q au point p' reste perpendiculaire à l'axe de rotation AB, et se rabat sur qp'_1, prolongement de pq; le point B reste immobile; la longueur Bp' ne varie pas; si donc du point B comme centre, avec un rayon égal à Bp', on décrit un arc de cercle, le point p'_1, où cet arc coupe la droite qp'_1, est le point où se place le point p', de sorte que la droite Bp'_1C_1 est le rabattement de la trace verticale du plan.

Fig. 66.



On peut encore obtenir le point p'_1 d'une autre manière. Si l'on construit le triangle rectangle qpp'_2, dont les côtés de l'angle droit sont pq et pp'_2, on obtient la longueur qp'_2 de la droite qui joint le point q au point p'; en portant cette longueur sur le prolongement de pq en qp'_1, on a le point p'_1, et par suite le rabattement BC_1 de la trace verticale du plan.

Une fois qu'on a construit le rabattement de la trace verticale du plan, on peut s'en servir pour toutes les constructions ultérieures. Considérons d'abord une droite $(ab, a'b')$ située dans le plan; sa trace horizontale a reste immobile; en prenant sur BC_1 une longueur Bb'_1 égale à Bb', on a le point b'_1 où se place la trace verticale b'; le rabattement de la droite est ab'_1. Comme vérification, on peut remarquer que la droite bb'_1 doit être perpendiculaire à AB.

On reconnaît qu'un point M est situé dans le plan ABC lorsqu'il est sur une droite $(ab, a'b')$ contenue dans ce plan; nous avons construit le rabattement ab'_1 de cette droite; menons du point m une perpendiculaire mh à AB; la droite Mh, qui est perpendiculaire à AB, reste perpendiculaire à cette droite et se place sur le prolongement de mh; le point M vient en M_1 à l'intersection des droites ab'_1 et mh.

Quand on a à considérer un grand nombre de points situés dans le plan ABC, au lieu de mener par chacun d'eux une droite quelconque située dans le plan, il est préférable de se servir des horizontales du plan. Soient mc, $m'c'$ les projections de la parallèle menée par le point M à la trace horizontale du plan; cette droite reste parallèle à l'axe de rotation; si donc sur BC_1 on prend une longueur Bc'_1 égale à Bc', et si par le point c'_1 on mène une droite c'_1M_1 parallèle à AB, on aura le rabattement de la droite $(mc, m'c')$. Le point M_1 sera donné par l'intersection de cette parallèle et de la perpendiculaire mh prolongée.

57. Réciproquement, soit ABC_1 le rabattement du plan ABC sur le plan horizontal; dans le plan rabattu traçons une droite quelconque ab'_1, et cherchons les projections de cette droite quand on ramène le plan à sa première position en le faisant tourner autour de la droite AB. Le point a qui est sur l'axe reste immobile; c'est la trace horizontale de la droite. Le point b'_1 se place en b' sur la trace verticale BC du plan, à une distance Bb' égale à Bb'_1; le point b' est la trace verticale de la droite, dont les projections sont ainsi ab, $a'b'$.

De même, soit un point M_1 quelconque dans le plan rabattu; pour déterminer la position de ce point quand le plan est ramené à sa position primitive, menons par le point M_1 une droite arbitraire ab'_1 dont nous construirons, comme nous l'avons dit, les projections ab, $a'b'$. La perpendiculaire M_1h abaissée du point M_1 sur l'axe AB reste perpendiculaire à cet axe, et sa projection horizontale est le prolongement de M_1h; la projection horizontale m du point M est à l'intersection des droites ab et M_1h; on en déduit la projection verticale m'.

Si l'on donne plusieurs points dans le plan ABC_1, au lieu de

mener par chacun d'eux une droite arbitraire, il sera préférable de mener des parallèles à la droite AB. Soit $M_1c'_1$ la parallèle menée par le point M_1, cette droite reste parallèle à la trace horizontale du plan; en prenant sur BC une longueur Bc' égale à Bc'_1, on a sa trace verticale c'; sa projection verticale $c'm'$ est parallèle à la ligne de terre; sa projection horizontale cm est parallèle à AB. La projection horizontale m du point M est à l'intersection des droites cm et M_1h.

Des rotations.

58. Les constructions à effectuer pour résoudre un problème deviennent souvent très-simples lorsque la figure occupe une position particulière par rapport aux plans de projection; il est donc très-avantageux de pouvoir déplacer la figure; on y parvient quelquefois en la faisant tourner autour d'un axe perpendiculaire à l'un des plans de projection.

Supposons d'abord que l'on fasse tourner la figure d'un certain angle autour d'un axe perpendiculaire au plan horizontal; chaque point décrit un arc de cercle, dont le centre est le pied de la perpendiculaire abaissée du point sur l'axe, et dont le plan est perpendiculaire à l'axe; cet arc de cercle, étant dans un plan horizontal, se projette en vraie grandeur sur le plan horizontal, et suivant une parallèle à la ligne de terre sur le plan vertical.

Fig. 67.

Soit o la projection horizontale de l'axe, et $o'z'$ sa projection verticale (fig. 67); la perpendiculaire abaissée d'un point (m, m') sur l'axe a pour projection horizontale mo, et pour projection verticale une parallèle $m'c'$ à la ligne de terre. L'arc décrit par le point M se projette sur le plan horizontal suivant un arc de cercle mm_1 décrit du point o comme centre avec om pour rayon, et tel que l'angle mom_1 soit égal à l'angle de rotation α; ce même arc se projette sur le plan *vertical* suivant une pa-

rallèle $m'm'_1$ à la ligne de terre. Après la rotation, le point M a pour projections m_1, m'_1.

59. On déterminera la nouvelle position d'une droite à l'aide

Fig 68.

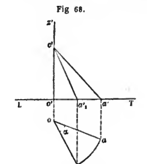
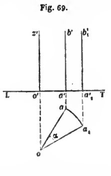
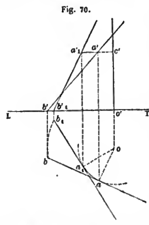


Fig. 69.



de deux de ses points. Lorsque la droite rencontre l'axe (fig. 68), le point de rencontre c' reste immobile, et la droite décrit une surface conique; il suffit alors de considérer un second point, par exemple sa trace horizontale a. Lorsque la droite est parallèle à l'axe, elle décrit un cylindre; il suffit alors de considérer sa trace horizontale (fig. 69). Enfin, quand la droite n'est pas dans un même plan avec l'axe, elle décrit une surface à laquelle on a donné le nom d'hyperboloïde de révolution. Soient $(ab, a'b')$ (fig. 70) les projections de la droite dans le cas général; la perpendiculaire commune à l'axe et à la droite se projette en vraie grandeur sur le plan horizontal, suivant une perpendiculaire oa abaissée du point o sur la projection horizontale ab, et sur le plan vertical suivant une parallèle $a'c'$ à la ligne de terre. Après la rotation, le point (a, a') vient en (a_1, a'_1); la projection horizontale de la droite reste tan-

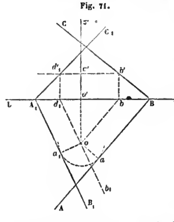
Fig. 70.



gente au cercle décrit par le point a, et vient en a_1b_1; on obtiendra la nouvelle position d'un second point de la droite, celle de la trace horizontale b, par exemple, en décrivant un arc de cercle du point o comme centre avec ob pour rayon, et on en déduira la nouvelle projection verticale $b'_1a'_1$ de la droite.

60. Pour déterminer la nouvelle position d'un plan ABC, il suffira de considérer deux droites situées dans ce plan. On prendra de préférence deux horizontales du plan, par exemple la trace horizontale AB et l'horizontale (ob, $c'b'$) qui rencontre l'axe. La trace horizontale AB (fig. 71), comme nous l'avons vu, reste tangente au cercle décrit du point o comme centre, avec un rayon égal à la perpendiculaire oa abaissée du point o sur cette droite, et vient en A_1B_1; la seconde droite restant pendant la rotation parallèle à AB, sa nouvelle projection horizontale ob_1 est parallèle à A_1B_1; sa projection verticale étant toujours $b'c'$, sa nouvelle trace verticale est d'_1. En joignant le point A_1 au point d'_1, on obtient la nouvelle trace verticale du plan.

Fig. 71.

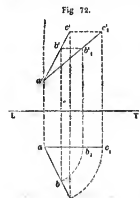


Lorsque le plan donné est vertical, comme il reste vertical pendant la rotation, il suffit de déterminer la nouvelle position de sa trace horizontale.

61. Appliquons ce procédé à la recherche de la distance de deux points. Lorsque la droite qui joint les deux points est parallèle au plan vertical, elle se projette sur ce plan en vraie grandeur; si la droite occupe une position quelconque dans l'espace, on la fera tourner autour d'un axe vertical jusqu'à ce qu'elle devienne parallèle au plan vertical de projection.

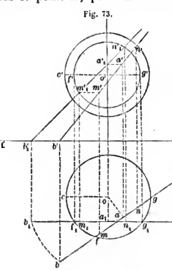
Soient $(a, a')(b, b')$ les projections des deux points donnés (fig. 72); faisons tourner la droite AB autour de la verticale menée par le point A, jusqu'à ce qu'elle devienne parallèle au plan vertical de projection. Le point A reste immobile; la projection horizontale ab de la droite tourne autour du point a et vient se placer sur une parallèle ab_1 à la ligne de terre; le point B se projette alors en b_1, b'_1. Dans cette nouvelle position, la droite se projette en vraie grandeur sur le plan vertical suivant $a'b'_1$.

Fig 72.



Si l'on veut porter sur la droite AB, à partir du point A, une longueur donnée, on fera tourner la droite autour de la verticale menée par le point A, pour la rendre parallèle au plan vertical de projection, et l'on déterminera sa nouvelle projection verticale à l'aide d'un second point quelconque (b, b') pris sur cette droite; sur cette projection verticale on portera une longueur $a'c'_1$ égale à la longueur donnée; ramenant ensuite la droite à sa position primitive, on aura les projections (c, c') du point cherché.

Fig. 73.



62. Comme second exemple, cherchons les points d'intersection d'une sphère et d'une droite donnée $(ab, a'b')$. Soit (o, o') le centre de la sphère (fig. 73); le grand cercle horizontal se projette sur le plan horizontal suivant un cercle

décrit du point o comme centre, avec un rayon oc égal au rayon de la sphère; de même le grand cercle parallèle au plan vertical se projette sur le plan vertical suivant un cercle égal décrit du point o' comme centre. La sphère étant comprise dans le cylindre vertical qui la touche suivant la circonférence du grand cercle horizontal, tout point de sa surface se projette sur le plan horizontal à l'intérieur du cercle oc; on verrait de même que la surface de la sphère se projette sur le plan vertical à l'intérieur du cercle $o'c'$.

Faisons tourner toute la figure autour de l'axe vertical passant par le centre de la sphère, jusqu'à ce que la droite donnée devienne parallèle au plan vertical de projection, et soient a_1b_1, $a'_1b'_1$ les nouvelles projections de la droite. Dans ce mouvement de rotation, la sphère coïncide toujours avec elle-même. Le plan vertical mené par la droite coupe la sphère suivant un cercle qui, après la rotation, se projette en vraie grandeur sur le plan vertical; le centre de ce cercle est situé sur une droite menée par le centre de la sphère perpendiculairement au plan sécant; cette droite est ici perpendiculaire au plan vertical de projection, et par conséquent le centre du cercle se projette en o' sur ce plan. Le diamètre horizontal de ce cercle, étant une corde du grand cercle horizontal, se projette en vraie grandeur sur le plan horizontal suivant f_1g_1. Si donc du point o' comme centre, avec un rayon égal à la moitié de f_1g_1, on décrit un cercle, on aura la projection verticale du cercle d'intersection de la sphère et du plan vertical mené par la droite.

Les deux points m'_1, n'_1, où la projection verticale $a'_1b'_1$ de la droite rencontre la projection verticale du cercle, sont les projections verticales des points où la droite perce la surface de la sphère; on en déduit les projections horizontales m_1, n'_1 de ces mêmes points. Par une rotation en sens contraire de la première, on ramènera ensuite la sphère et la droite à leur première position, et on déterminera les projections (m, m'), (n, n') des points d'intersection.

63. Nous avons expliqué comment on construit les nou-



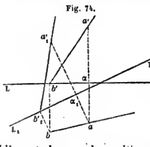
velles projections d'une figure, quand on la fait tourner autour d'un axe perpendiculaire au plan horizontal; les constructions sont exactement les mêmes quand on la fait tourner autour d'un axe perpendiculaire au plan vertical.

Une seule rotation suffit pour rendre une droite donnée parallèle, ou un plan donné perpendiculaire, à l'un des plans de projection. Mais il faudrait deux rotations pour rendre une droite perpendiculaire, ou un plan parallèle, à ce plan de projection. Par exemple, si l'on veut rendre une droite de la figure perpendiculaire au plan horizontal, on la fera tourner d'abord autour d'un axe perpendiculaire au plan horizontal, jusqu'à ce qu'elle devienne parallèle au plan vertical; ensuite on la fera tourner autour d'un axe perpendiculaire au plan vertical, jusqu'à ce qu'elle devienne perpendiculaire au plan horizontal. De même, si l'on veut rendre un plan parallèle au plan horizontal, on le fera tourner d'abord autour d'un axe perpendiculaire au plan horizontal, jusqu'à ce qu'il devienne perpendiculaire au plan vertical; puis autour d'un axe perpendiculaire au plan vertical, jusqu'à ce qu'il devienne parallèle au plan horizontal.

Changement des plans de projection.

64. Nous avons dit que la simplicité d'une épure dépend de la position de la figure par rapport aux plans de projection; au lieu de faire tourner la figure autour d'un axe, ou successivement autour de deux axes, comme nous l'avons expliqué, pour l'amener dans une position convenable, on peut, au contraire, laisser la figure immobile, et changer la position des plans de projection.

Fig. 74.



Supposons d'abord que, laissant invariable le plan horizontal, on change la position du plan vertical. Soit $L_1 T_1$ la nou-

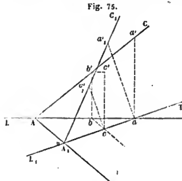
velle ligne de terre (fig. 74), c'est-à-dire la trace du nouveau plan vertical sur le plan horizontal; il est évident que la projection de la figure sur le plan horizontal ne change pas; pour construire la projection sur le nouveau plan vertical, on prendra pour plan de l'épure le plan horizontal, et on imaginera que le plan vertical a été rabattu sur le plan horizontal.

Pour trouver la nouvelle projection verticale a'_1 d'un point A, on mènera de la projection horizontale a une perpendiculaire $a\alpha_1$ à la ligne de terre, et on portera sur cette perpendiculaire, à partir de la ligne de terre et du côté convenable (n° 8), une longueur $\alpha_1 a'_1$ égale à la hauteur $\alpha a'$ du point A au-dessus du plan horizontal.

Pour obtenir la nouvelle projection verticale $b'_1 a'_1$ d'une droite AB, on construira les nouvelles projections verticales de deux de ces points; on emploiera de préférence la trace horizontale b.

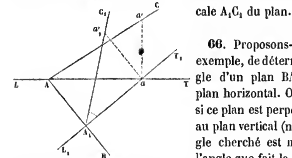
63. Pour déterminer la nouvelle trace verticale d'un plan BAC (fig. 75), on remarquera d'abord que le point A_1, où la trace horizontale rencontre la nouvelle ligne de terre, appartient à cette trace verticale. On observera ensuite que la droite d'intersection aa' des deux plans verticaux rencontre le plan donné en un point dont les anciennes projections sont a et a'; en élevant au point a une perpendiculaire à la nouvelle ligne de terre, et prenant sur cette perpendiculaire une longueur aa'_1 égale à aa', on aura la nouvelle projection verticale de ce point, et par suite un point de la nouvelle trace verticale du plan.

Fig. 75.



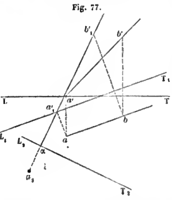
Si le point d'intersection a des deux lignes de terre était trop éloigné, on mènerait dans le plan une horizontale $(bc, b'c')$, et

on chercherait le point (c, c') où elle rencontre le nouveau plan vertical; la nouvelle projection verticale c'_1 de ce point appartient à la nouvelle trace verticale A_1C_1 du plan.



66. Proposons-nous, par exemple, de déterminer l'angle d'un plan BAC avec le plan horizontal. On sait que, si ce plan est perpendiculaire au plan vertical (n° **47**), l'angle cherché est mesuré par l'angle que fait la trace verticale du plan avec la ligne de terre. On prendra une nouvelle ligne de terre L_1T_1 perpendiculaire à la trace horizontale AB (fig. 76), et on déterminera la nouvelle trace verticale A_1C_1; l'angle $C_1A_1T_1$ est l'angle demandé.

67. Nous avons laissé le plan horizontal fixe, et nous avons changé la position du plan vertical; on pourrait, au contraire, laisser fixe le plan vertical et changer la direction de l'autre plan de projection. Dans ce cas, on prendrait pour plan de l'épure le plan vertical, sur lequel on rabattrait le nouveau plan de projection. Ce nouveau plan cesse en général d'être horizontal; cependant, pour la commodité du discours, on l'appelle encore plan horizontal.



En laissant fixe l'un des plans de projection, on peut rendre l'autre parallèle à une droite donnée, ou perpendiculaire à un plan donné. Mais si l'on voulait rendre l'un des plans de projection perpendiculaire à une

droite donnée, ou parallèle à un plan donné, il faudrait changer la position des deux plans de projection. Par exemple, pour rendre l'un des plans de projection perpendiculaire à la droite AB (fig. 77), on laissera d'abord fixe le plan horizontal, et on prendra pour nouvelle ligne de terre une droite L_1T_1 parallèle à la projection horizontale ab; on construira la nouvelle projection verticale $a'_1b'_1$ de la droite. Laissant ensuite ce nouveau plan vertical fixe, on prendra pour nouvelle ligne de terre une droite L_2T_2 perpendiculaire à la nouvelle projection verticale $a'_1b'_1$ de la droite; en prenant la longueur αa_2 égale à aa'_1, on aura la nouvelle projection horizontale a_2 de la droite; cette projection se réduit à un point. On pourrait, par ce moyen, ramener la recherche de la perpendiculaire commune à deux droites au cas particulier où l'une des droites est perpendiculaire au plan horizontal.

Lorsque la simplification de l'épure exige deux opérations, soit deux rotations, soit deux changements de plans de projection, il est souvent avantageux, pour la clarté de l'épure, d'employer deux opérations différentes : une rotation et un changement de plan de projection.

CHAPITRE V.

PROJECTIONS D'UN CERCLE.

Projections d'une courbe quelconque. — Projections d'un cercle situé dans un plan perpendiculaire au plan vertical. — Projections d'un cercle situé dans un plan quelconque.

68. On appelle projection d'une courbe AB sur un plan le lieu des projections de tous les points de la courbe. Si des différents points de la courbe on abaisse des perpendiculaires sur le plan de projection LM, on formera un *cylindre projetant* dont la trace *ab* (fig. 78) sur le plan de projection sera la projection de la courbe proposée.

Fig. 78.

Pour déterminer complétement la courbe dans l'espace, il faut donner ses projections *ab*, *a'b'*, sur deux plans LM, LN. Si par la projection horizontale *ab* on élève un cylindre perpendiculaire au plan horizontal de projection, et si par la projection verticale *a'b'* on mène un cylindre perpendiculaire au plan vertical, l'intersection de ces deux cylindres donnera la courbe AB dans l'espace.

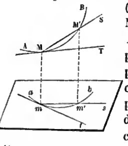


Fig. 79.

Soit *ab* la projection d'une courbe AB (fig. 79), la projection *mt* de la tangente MT en un point quelconque M de la ligne AB est tangente à la courbe *ab*. En effet, par le point M et un point voisin M' faisons passer une sécante MS, la projection de cette sécante est une droite *ms* passant par les deux points *m* et *m'*, projections de M et M'; si l'on fait tourner la sécante MS autour du point M de manière que le point M' s'approche indéfiniment du point M, la

sécante tend vers une position limite MT, qui est la tangente à la courbe AB au point M; en même temps le point m' s'approche indéfiniment du point m, et la sécante ms, projection de MS, tend vers une position limite mt, qui est la tangente à la courbe ab au point m; on en conclut que la tangente mt est la projection de la tangente MT.

Nous appliquerons au cercle ce mode de représentation des lignes.

Problème I.

69. *Construire les projections d'un cercle situé dans un plan perpendiculaire au plan vertical.*

Lorsque le plan du cercle est parallèle au plan horizontal, il est clair que le cercle se projette sur le plan horizontal suivant un cercle égal, et sur le plan vertical suivant une droite parallèle à la ligne de terre, droite qui est la trace du plan du cercle.

Supposons maintenant le cercle situé dans un plan PQR, oblique à l'horizon, mais perpendiculaire au plan vertical de projection (fig. 1, pl. I). Le plan du cercle étant perpendiculaire au plan vertical, le cylindre qui projette le cercle sur le plan vertical, se réduit au plan même du cercle; la projection verticale du cercle se réduit donc dans ce cas à une ligne droite $c'd'$, égale au diamètre, et située sur la trace verticale du plan. Soient o, o' les projections du centre. Par le point o' menons une droite perpendiculaire au plan vertical de projection; cette droite, passant par le centre, sera un diamètre AB du cercle. Imaginons que le plan du cercle tourne autour de ce diamètre, jusqu'à ce qu'il devienne parallèle au plan horizontal, alors le cercle se projettera sur le plan horizontal suivant un cercle ad_1bc_1, décrit du point o comme centre avec le rayon donné, et sur le plan vertical suivant la droite $c'_1d'_1$, parallèle à la ligne de terre et égale à un diamètre. Traçons ce cercle. Supposons maintenant que le plan du cercle tourne de nouveau autour du diamètre AB, mais en sens inverse, pour revenir à sa position primitive. Dans ce mouvement, un point quelconque m_1 du cercle

décrira un arc de cercle ayant son centre sur l'axe de rotation AB et son plan perpendiculaire à cet axe.

Cet arc se projette en vraie grandeur sur le plan vertical, suivant un arc de cercle m'_1m' décrit du point o' comme centre, et sur le plan horizontal suivant une droite m_1m parallèle à la ligne de terre; la projection verticale du point vient en m' sur la trace verticale du plan, et une perpendiculaire $m'm$ à la ligne de terre détermine la projection horizontale m. En répétant la même construction pour différents points du cercle et faisant passer à la main un trait continu par tous les points ainsi obtenus, on aura la courbe *adbc*, suivant laquelle le cercle donné se projette sur le plan horizontal.

Remarques.

70. Cette courbe est arrondie et a la forme ovale. On lui a donné le nom d'*ellipse*. Voici quelques-uns de ses propriétés.

Remarquons d'abord que les deux extrémités a et b du diamètre ab, étant situées sur l'axe de rotation, restent immobiles, et par conséquent appartiennent à l'ellipse. On voit sur la figure que ce diamètre ab est un *axe* de l'ellipse, c'est-à-dire partage la courbe en deux parties symétriques. Car, si l'on prend dans le cercle une corde m_1n_1 perpendiculaire à ab, cette corde, d'abord horizontale, tournant autour de son milieu i, deviendra parallèle à QR, et se projettera suivant mn; le point i, milieu de la corde m_1n_1, restera encore le milieu de la projection mn. Ainsi, tous les points de l'ellipse sont deux à deux symétriques par rapport à la ligne ab qui est le *grand axe* de l'ellipse.

Considérons dans le cercle le diamètre c_1d_1 perpendiculaire à ab. Ce diamètre, tournant autour du point o, se projette suivant la ligne cd qui est un second axe de l'ellipse. Car, si dans le cercle on prend une corde k_1m_1 parallèle à ab, cette corde reste parallèle à ab dans le mouvement de rotation; elle décrit un cylindre et se projette en vraie grandeur suivant km; les deux

points k_1 et m_1 sont symétriques par rapport au diamètre c_1d_1, et il en est de même des deux points k et m. Ainsi la courbe est divisée en deux parties symétriques par le diamètre cd qui est le *petit axe* de l'ellipse.

Le centre du cercle est aussi *centre* de l'ellipse. Car, un diamètre quelconque du cercle étant divisé par le centre en deux parties égales, sa projection sera aussi divisée en deux parties égales par la projection o du centre. Ainsi, dans l'ellipse, toutes les droites menées par le point o sont divisées en ce point en deux parties égales; c'est pourquoi le point o est dit centre de l'ellipse.

71. On conclut de ce qui précède que la projection d'un cercle sur un plan quelconque est une ellipse. Car on peut toujours imaginer que les deux plans de projection rectangulaires soient, l'un le plan sur lequel on projette le cercle, l'autre un plan perpendiculaire au premier et au plan du cercle. La disposition des choses sera exactement celle de la figure précédente, et même, pour ne pas changer le discours, rien n'empêche que l'on continue d'appeler plan horizontal le premier plan, et plan vertical le second. Le grand axe de l'ellipse est la projection en vraie grandeur du diamètre parallèle au plan de projection, le petit axe la projection du diamètre perpendiculaire au premier.

72. La perpendiculaire mi abaissée d'un point quelconque m de l'ellipse sur le grand axe ab s'appelle une *ordonnée* de l'ellipse. L'ordonnée mi de l'ellipse est la projection de l'ordonnée correspondante m_1i du cercle. On démontre aisément que le rapport de ces deux ordonnées est constant. En effet, l'ordonnée im de l'ellipse est égale à $o'\alpha$; l'ordonnée im_1 du cercle à $o'm'_1$ et par suite à $o'm'$; de même l'ordonnée od est égale à $o'\beta$ et od_1 à $o'd'_1$ ou à $o'd'$. Mais les deux triangles rectangles semblables $o'm'\alpha$, $o'd'\beta$ donnent les rapports égaux

$$\frac{o'\alpha}{o'm'} = \frac{o'\beta}{o'd'}$$

ou, en remplaçant ces longueurs par des longueurs égales,

$$\frac{im}{im_1} = \frac{od}{od_1} = \frac{cd}{ab}.$$

Ainsi, *le rapport d'une ordonnée quelconque de l'ellipse à l'ordonnée correspondante du cercle est égale au rapport du petit axe au grand axe.* Cette propriété est caractéristique : elle définit complétement l'ellipse. Il en résulte que l'on peut considérer l'ellipse comme provenant de la déformation d'un cercle dont on réduit toutes les ordonnées dans un même rapport.

73. On peut aussi construire la projection de la tangente en un point quelconque (m, m'). Menons la tangente m_1t au cercle au point m_1, et prolongeons cette tangente jusqu'à sa rencontre en t avec le prolongement de l'axe ab. Dans le mouvement de rotation autour de l'axe, la droite m_1t décrit un cône ayant pour sommet le point t, qui reste immobile; le point m_1 venant en m, la tangente se projettera suivant la droite mt; cette droite est évidemment tangente à l'ellipse.

Problème II.

74. *Construire les projections d'un cercle situé dans un plan quelconque.*

Supposons maintenant le cercle situé dans un plan quelconque PQR (fig. 2, pl. I). Faisons tourner ce plan autour de sa trace horizontale PQ pour le rabattre sur le plan horizontal; la trace verticale QR se rabat sur la droite QR_1. Dans le plan ainsi rabattu, traçons le cercle donné O, puis imaginons qu'on relève ce plan, en le faisant tourner autour de la ligne PQ, pour le ramener à sa position primitive, et proposons-nous de construire les projections du cercle.

A cet effet, prenons un point quelconque M du cercle, et cherchons les projections m, m' de ce point quand le plan est relevé, en employant l'horizontale MK comme nous l'avons expliqué (n° 56).

On obtiendra ainsi les projections d'autant de points du cercle que l'on voudra ; faisant ensuite passer un trait continu par ces différents points, on décrira les deux ellipses *acbd*, *a'c'b'd'*, projections du cercle sur les deux plans de projections.

Remarques.

75. Considérons d'abord l'ellipse horizontale. Traçons dans le cercle deux diamètres, l'un AB parallèle à PQ, l'autre CD perpendiculaire, et construisons les projections de leurs extrémités. D'après ce qui a été dit dans le problème précédent (n° **70**), la projection *ab* du diamètre horizontal AB est le grand axe de l'ellipse, la projection *cd* du diamètre perpendiculaire CD est le petit axe. Il est d'ailleurs très-aisé de le voir directement sur l'épure ; une corde perpendiculaire à AB ou à PQ donne dans l'ellipse une corde aussi perpendiculaire à PQ, ou à *ab* ; mais la première est divisée par le diamètre AB en deux parties égales ; sa projection est de même divisée par le diamètre *ab* en deux parties égales ; la ligne *ab* divise donc l'ellipse en deux parties symétriques, c'est le grand axe. Une corde horizontale ou parallèle à PQ dans le cercle, donne dans l'ellipse une corde qui est aussi parallèle à PQ, et par conséquent perpendiculaire à *cd* ; mais la première est divisée en deux parties égales par le diamètre perpendiculaire CD ; sa projection est de même divisée en deux parties égales par le diamètre *cd*, qui est le petit axe de l'ellipse.

76. Ces deux diamètres rectangulaires AB et CD du cercle, qui donnent les deux axes de l'ellipse horizontale, donnent, non pas les deux axes de l'ellipse verticale, mais un système de deux *diamètres conjugués a'b'* et *c'd'*. On appelle ainsi deux diamètres tels que chacun d'eux divise en deux parties égales les cordes parallèles à l'autre. Dans le cercle, deux diamètres rectangulaires, tels que AB et CD, forment évidemment un système de diamètres conjugués ; car AB divise en deux parties égales les cordes parallèles à CD et réciproquement. En projection, les

cordes parallèles à $c'd'$ sont toujours divisées en deux parties égales par le diamètre $a'b'$, et de même les cordes parallèles à $a'b'$ par le diamètre $c'd'$; dans l'ellipse, les deux diamètres $a'b'$ et $c'd'$ forment donc un système de diamètres conjugués. Quand deux diamètres conjugués sont rectangulaires, il est clair que chacun d'eux divise la courbe en deux parties symétriques; ce sont les deux axes de l'ellipse. C'est ce qui a lieu en projection horizontale; les deux diamètres conjugués ab et cd, étant rectangulaires, sont les axes de l'ellipse horizontale.

Si l'on voulait avoir les axes de l'ellipse verticale, il faudrait tracer dans le cercle deux diamètres rectangulaires EF et GH, l'un parallèle à QR_1, l'autre perpendiculaire. Dans le mouvement autour de PQ, le diamètre EF, restant parallèle à QR_1, devient parallèle à QR et, par conséquent, parallèle au plan vertical; sa projection verticale $e'f'$ est parallèle à QR, et sa projection horizontale ef parallèle à la ligne de terre; la droite $e'f'$ est le grand axe de l'ellipse. Le diamètre perpendiculaire GH donne le petit axe $g'h'$.

La tangente Mt au cercle a pour projections les tangentes mt, $m't'$ aux ellipses; le point t, qui est sur l'axe de rotation PQ, reste immobile.

CHAPITRE VI.

PROJECTIONS DE DIFFÉRENTS SOLIDES.

Cube dans diverses positions. — Pyramide. — Prisme. — Polyèdre. — Intersection de deux polyèdres. — Polyèdres réguliers. — Plan, élévation, coupe.

Problème I.

77. *Construire les projections d'un cube dont la base repose sur le plan horizontal.*

Nous supposons que la base du cube *abcd* (fig. 3, pl. I) repose sur le plan horizontal. Les arêtes latérales du cube, étant verticales, se projettent en vraie grandeur sur le plan vertical, suivant des droites $a'e'$, $b'f'$, $c'g'$, $d'h'$, perpendiculaires à la ligne de terre. La projection horizontale *efgh* de la face supérieure du cube coïncide avec la base inférieure; quant à sa projection verticale $e'g'$, elle est parallèle à la ligne de terre.

Problème II.

78. *Construire les projections d'un cube dont la base repose sur un plan perpendiculaire au plan vertical.*

On suppose que l'une des faces du cube repose sur le plan PQR (fig. 4, pl. I), oblique à l'horizon, mais perpendiculaire au plan vertical de projection. Faisons tourner ce plan autour de la ligne PQ pour le rabattre sur le plan horizontal, et dans le plan rabattu traçons le carré ABCD, base du cube. Ramenons maintenant le plan à sa position primitive. La base du cube étant située dans le plan PQR perpendiculaire au plan vertical, sa projection verticale tombe sur la trace verticale QR du plan. Dans le mouvement de rotation, le point A décrit un arc de cercle, qui a pour centre le pied H de la perpendiculaire abaissée du point A sur l'axe PQ, et dont le plan, perpendiculaire à

la ligne PQ, est parallèle au plan vertical; cet arc de cercle se projette donc sur le plan horizontal suivant la ligne A*a* parallèle à la ligne de terre; sur le plan vertical, il se projette en vraie grandeur suivant un arc de cercle décrit du point Q comme centre avec un rayon égal à AH. La rencontre de cet arc de cercle avec la ligne QR donne la projection verticale *a'* du point A; on en déduit la projection horizontale *a* par une perpendiculaire à la ligne de terre. On construira de même les projections des autres sommets du carré, et, joignant ces points deux à deux, on obtiendra le parallélogramme *abcd*, projection horizontale de la base du cube.

Les arêtes latérales du cube, étant perpendiculaires au plan PQR, sont parallèles au plan vertical, et par conséquent se projettent en vraie grandeur sur ce plan. On sait d'ailleurs que les projections de ces droites perpendiculaires au plan PQR sont respectivement perpendiculaires aux traces du plan (nº 36). Donc, si par les points *a'*, *b'*, *c'*, *d'* on élève des perpendiculaires *a'e'*, *b'f'*, *c'g'*, *d'h'* à la ligne QR, et que l'on prenne ces perpendiculaires égales aux arêtes du cube, on aura les projections verticales des arêtes latérales. Leurs projections horizontales sont perpendiculaires à la ligne PQ; on en déterminera les extrémités *e*, *f*, *g*, *h*, en menant des points *e'*, *f'*, *g'*, *h'* des perpendiculaires à la ligne de terre. La figure *efgh*, projection de la base supérieure du cube, est un parallélogramme égal au premier; la projection verticale est une droite *e'g'* parallèle à *a'c'*.

79. Il est bon, afin de se représenter plus aisément le solide dans l'espace, de marquer les arêtes visibles par des lignes pleines et les arêtes invisibles par des lignes ponctuées. Voici les conventions généralement admises à cet égard. En ce qui concerne la projection horizontale, on imagine qu'un observateur, placé à une très-grande hauteur au-dessus du plan horizontal, regarde le corps; toute la partie du corps visible pour cet observateur sera marquée par des lignes pleines sur la projection horizontale; toute la partie invisible sera marquée par

des lignes ponctuées. Dans l'exemple actuel, il est clair que la base supérieure *efgh* du cube est entièrement visible pour l'observateur placé à une très-grande hauteur au-dessus du plan horizontal, ainsi que les trois arêtes latérales *bf*, *cg*, *dh*, l'arête latérale *ae* est invisible, ainsi que les deux arêtes *ab* et *ad* de la base inférieure.

Quant à la projection verticale, on imagine un observateur placé à une très-grande distance en avant du plan vertical; la partie visible pour cet observateur sera marquée en lignes pleines, et la partie invisible en lignes ponctuées. Les trois arêtes latérales *a'e'*, *b'f'*, *c'g'* sont visibles, l'arête *d'h'* invisible.

Problème III.

80. *Construire les projections d'un cube dont la base repose sur un plan quelconque.*

Faisons tourner le plan PQR, sur lequel repose la base du cube, autour de sa trace horizontale PQ (fig. 7, pl. II), pour le rabattre sur le plan horizontal, et déterminons, comme au nº **56**, le rabattement QR_1 de la trace verticale QR du plan. Dans le plan rabattu, soit ABCD le carré servant de base au cube. Relevons maintenant le plan pour le ramener à sa position primitive. On obtiendra les projections *a*, *a'* du point A à l'aide de l'horizontale AK; on obtiendra de même les projections des autres sommets, et par suite les parallélogrammes *abcd*, *a'b'c'd'*, projections du carré ABCD, base du cube.

Les arêtes latérales du cube étant perpendiculaires au plan PQR, leurs projections sont respectivement perpendiculaires aux traces du plan; il s'agit de porter sur l'une d'elles (*ae*, *a'e'*), à partir du point (*a*, *a'*), une longueur égale au côté du cube. Pour cela, rabattons le plan qui projette cette arête sur le plan horizontal, en le faisant tourner autour de sa trace horizontale *a*H; le point A se rabat en A_1 sur une perpendiculaire à *a*H, et à une distance aA_1 égale à *αa'*. La ligne HA_1 est le rabattement de HA. L'arête latérale du cube, étant perpendiculaire à

cette ligne, aura pour rabattement la droite A_1E_1 perpendiculaire à HA_1 et égale au côté AB du cube. Si maintenant on relève le plan projetant, la droite E_1e, perpendiculaire à aH, deviendra verticale, et le point e sera la projection horizontale du sommet E du cube; on en déduira la projection verticale e' par une perpendiculaire à la ligne de terre. Une fois les projections du sommet E déterminées, on obtiendra immédiatement les projections de la base supérieure du cube, en remarquant que ces projections sont égales et parallèles à celles de la base inférieure.

Problème IV.

81. *Construire les projections d'un cube ayant l'une de ses diagonales verticale.*

Soit MN le côté du cube (fig. 5, pl. I); si sur une perpendiculaire à MN on prend MP = MN, l'hypoténuse NP sera la diagonale de la base du cube; si sur une perpendiculaire à NP on prend ensuite PQ = MN, la longueur NQ représentera la diagonale du cube. On suppose le cube placé de telle sorte que l'une de ses diagonales soit perpendiculaire au plan horizontal qu'elle touche par son extrémité inférieure au point b. Cette diagonale aura pour projection horizontale le point b, et pour projection verticale la droite $b'a'$, perpendiculaire à la ligne de terre et égale à NQ. Les douze arêtes du cube sont parallèles quatre à quatre. Considérons d'abord le cas où quatre arêtes du cube sont parallèles au plan vertical; le plan passant par les deux arêtes opposées AC, BF sera parallèle au plan vertical; ce plan coupe le cube suivant un rectangle qui se projette en vraie grandeur sur le plan vertical en $a'c'b'f'$, et qui a pour côtés deux arêtes $a'c'$, $b'f'$ du cube, et les diagonales $b'c'$, $a'f'$ de deux faces opposées. On l'obtiendra en construisant un triangle $a'b'c'$ égal au triangle QNP.

Les arêtes AC, BF, dont on connaît les projections verticales $a'c'$, $b'f'$, étant parallèles au plan vertical, ont leurs projections horizontales ac et bf parallèles à la ligne de terre. Les trois

arêtes AC, AE, AG, qui aboutissent au point A, étant également inclinées sur la diagonale verticale AB, ont leurs projections horizontales *ac*, *ae*, *ag* égales entre elles; il en résulte aussi que les trois angles droits que forment ces arêtes deux à deux se projettent sur le plan horizontal suivant des angles *cae*, *eag*, *gac* égaux entre eux, et valant chacun 120 degrés, puisqu'ils recouvrent tout le plan. Ainsi, les trois faces du cube qui aboutissent au point A ont pour projections sur le plan horizontal les trois losanges égaux *acde*, *aefg*, *aghc*, formant ensemble un hexagone régulier. Ces trois faces sont visibles pour un observateur placé à une grande hauteur au-dessus du plan horizontal. De même les trois faces qui aboutissent à l'extrémité inférieure B, et qui sont invisibles, se projettent suivant les trois losanges égaux *bdef*, *bfgh*, *bhcd*. La manière la plus simple d'effectuer la construction sera de décrire un cercle du point *a* comme centre avec *ac* pour rayon, et d'inscrire dans ce cercle un hexagone régulier.

Les deux faces opposées AEFG, BDCH sont perpendiculaires au plan du rectangle ACBF, et par conséquent perpendiculaires au plan vertical; elles se projettent donc sur le plan vertical suivant les deux droites *a'f'*, *b'c'*. La diagonale AF de la première face étant parallèle au plan vertical, l'autre diagonale EG, qui lui est perpendiculaire et est horizontale, est perpendiculaire au plan vertical et se projette au point *e'*, milieu de *a'f'*; ce point est la projection verticale des deux sommets E et G. De même la diagonale DH de la seconde face est perpendiculaire au plan vertical et se projette au point *d'*, milieu de *b'c'*; ce point est la projection verticale des deux sommets D et H. On connaît ainsi les projections de tous les sommets. Les deux arêtes DE, HG, qui sont parallèles aux arêtes AC, BF, ont même projection verticale *d'e'*; les deux faces ACDE, ACHG ont même projection verticale, le rectangle *a'c'd'e'*; les deux faces BDEF, BHGF ont aussi même projection verticale, le rectangle *b'd'e'f'*. Il est clair que les trois sommets C, E, G sont à la même hauteur au-dessus du plan horizontal, ainsi que les trois sommets D, F, H; il en résulte que les droites *c'e'* et *d'f'* sont paral-

lèles à la ligne de terre. Il est bon de remarquer aussi que ces deux parallèles divisent la diagonale $a'b'$ en trois parties égales.

82. Considérons maintenant le cas où le plan du rectangle ACBF, qui est toujours vertical, n'est plus parallèle au plan vertical et fait avec ce plan un certain angle cac_1 (fig. 6, pl. I). Imaginons que le cube tourne autour de la diagonale verticale AB de l'angle cac_1, jusqu'à ce que le plan du rectangle devienne parallèle au plan vertical. Le rectangle aura alors pour projection verticale le rectangle égal $a'c'_1b'f'_1$, que l'on construira comme précédemment, et pour projection horizontale une parallèle c_1f_1 à la ligne de terre. Faisons tourner de nouveau le cube autour de la diagonale verticale AB pour le ramener à sa position primitive, chaque point décrira un arc de cercle dans un plan perpendiculaire à l'axe et par conséquent horizontal; cet arc se projettera en vraie grandeur sur le plan horizontal suivant un arc égal décrit du point b comme centre, et sur le plan vertical suivant une parallèle à la ligne de terre. Ainsi, la projection horizontale du sommet C vient en c après avoir décrit l'arc c_1c, tandis que la projection verticale se meut parallèlement à la ligne de terre de c'_1 en c'. L'hexagone régulier a tourné en quelque sorte tout d'une pièce autour de son centre; ayant le point c, on construira l'hexagone dans sa nouvelle position; connaissant les projections horizontales de tous les sommets, on en déduira les projections verticales par des perpendiculaires à la ligne de terre.

Problème V.

83. *Construire les projections d'un cube dont la base repose sur un plan passant par la ligne de terre.*

Dans la plupart des questions de géométrie descriptive, deux plans de projections suffisent, le plan horizontal sur lequel on construit l'épure, et le plan vertical élevé par la ligne de terre LT et rabattu sur le plan horizontal. Dans la question actuelle, nous nous servirons d'un second plan vertical de projection perpendiculaire au premier; ce second plan vertical est

élevé suivant la ligne PQ perpendiculaire à LT (fig. 8, pl. II); nous le rabattrons de même sur le plan horizontal en le faisant tourner autour de sa trace PQ, qui joue ici le rôle d'une nouvelle ligne de terre.

Le cube repose par une de ses faces sur un plan passant par la ligne de terre LT, et faisant avec le plan horizontal un certain angle, par exemple, un angle de 30 degrés; la trace de ce plan sur le second plan vertical de projection, auquel il est perpendiculaire, sera la droite PR, qui fait avec PQ un angle de 30 degrés, de sorte que le plan sera représenté par ses deux traces LPR. On se retrouve alors dans le cas du problème II. Faisons tourner le plan LPR autour de PL pour le rabattre sur plan horizontal, et soit ABCD la base du cube rabattue. Quand on relève ce plan pour le ramener à sa position primitive, le point A décrit un arc de cercle qui se projette sur le plan horizontal suivant Aa, et en vraie grandeur sur le nouveau plan vertical suivant l'arc Aa'' décrit du point P comme centre. En prenant $\alpha a'$ égale à $\beta a''$, on obtient la projection a' du point A sur le premier plan vertical. En répétant la même construction pour chacun des sommets, on aura les projections *abcd*, $a'b'c'd'$ de la base du cube.

Les arêtes latérales du cube, étant parallèles au second plan vertical, se projettent en vraie grandeur sur ce plan suivant des droites telles que $a''e''$ perpendiculaires à PR et égales aux arêtes du cube; sur les deux premiers plans, les projections de ces arêtes sont perpendiculaires à PL; en menant du point e'' une perpendiculaire $e''e$ à la nouvelle ligne de terre PQ, on obtiendra la projection horizontale e du sommet E; l'élévation de ce point au-dessus du plan horizontal étant mesurée par $\gamma e''$, il suffira de porter cette longueur en $\alpha e'$, perpendiculairement à la première ligne de terre, pour avoir la projection e' du sommet E sur le premier plan vertical.

Dans l'épure, on a supposé le plan sur lequel repose la base du cube limité par une droite ($mn,m'n'$) parallèle à la ligne de terre LT. Un observateur placé à une grande hauteur au-dessus du plan horizontal, voit la face supérieure *efgh* du cube et les

trois arêtes latérales *bf*, *cg*, *dh*, comme à l'ordinaire. Mais le plan cache une partie du cube à l'observateur qui est placé en avant du plan vertical et à une grande distance; cet observateur, outre les deux arêtes *f'g'*, *g'h'* de la base supérieure, ne voit que les portions des trois arêtes latérales *b'f'*, *c'g'*, *d'h'* qui dépassent le bord *m'n'* du plan.

Problème VI.

84. *Construire les projections d'une pyramide triangulaire dont la base repose sur le plan horizontal.*

Pour déterminer la pyramide, on mesurera avec un compas ou un cordon métrique les trois côtés de la base et les trois arêtes latérales. Avec les longueurs mesurées, construisons la base *abc* (fig. 9, pl. II) et les faces latérales abS_1, bcS_2, caS_3, supposées rabattues sur le plan horizontal. Relevons maintenant ces faces latérales; la première tournant autour de *ab*, le point S_1 se meut dans le plan vertical mené par la ligne S_1H perpendiculaire à *ab;* la seconde tournant autour de *bc*, le point S_2 se meut dans le plan vertical mené par la ligne S_2K perpendiculaire à *bc;* le sommet de la pyramide sera donc situé sur la verticale élevée par le point *s*, intersection des deux perpendiculaires S_1H, S_2K; on a ainsi la projection horizontale *s* du sommet de la pyramide. Remarquons, comme vérification, que la perpendiculaire menée du point S_3 sur *ca* doit passer par le même point *s*.

Cherchons maintenant la hauteur de la pyramide. Rabattons sur le plan horizontal le plan vertical projetant mené par *s*H, en le faisant tourner autour de cette ligne; la verticale, sur laquelle se trouve le sommet, se rabat suivant la droite sS_4 perpendiculaire à *s*H; du point H comme centre, avec HS_1 pour rayon, décrivons un arc de cercle qui coupera cette perpendiculaire en un point S_4; la ligne HS_4 est le rabattement de l'oblique HS; on a ainsi la hauteur sS_4 de la pyramide. Prenant $\alpha s' = sS_4$, on aura enfin la projection verticale *s'* du sommet de la pyramide.

Problème VII.

85. *Construire les projections d'une pyramide quelconque dont la base repose sur le plan horizontal.*

Considérons une pyramide pentagonale (fig. 10, pl. II). On mesurera les côtés du polygone de base et deux diagonales *ac* et *ad;* avec ces longueurs on pourra construire le polygone *abcde*, base de la pyramide. Quant au sommet, on pourra le déterminer en mesurant trois arêtes latérales consécutives, ce qui permettra de construire deux faces latérales telles que abS_1, bcS_2, supposées rabattues; l'intersection des deux perpendiculaires abaissées des points S_1 et S_2 sur les côtés *ab* et *bc* donnera la projection horizontale *s* du sommet de la pyramide. Au moyen du triangle rectangle *s*HS, dans lequel l'hypothénuse HS est égale à HS_1, on a la hauteur *s*S de la pyramide; portant cette hauteur en *αs'*, on obtient la projection verticale *s'* du sommet.

Il est facile de construire les autres faces latérales de la pyramide. On obtient le rabattement de la troisième en menant du point *s* une perpendiculaire à *cd* et décrivant du point *c* comme centre avec cS_2 pour rayon un arc de cercle qui coupera cette perpendiculaire au point S_3, et ainsi de suite.

Si la base de la pyramide était adhérente au plan horizontal, on serait obligé, pour mesurer les diagonales, d'employer un compas d'épaisseur, c'est-à-dire un compas à branches recourbées.

Lorsque la projection horizontale du sommet de la pyramide tombe en dehors de la base (fig. 11, pl. II), on peut déterminer directement les projections du sommet sans mesurer les arêtes latérales. On suspendra un fil à plomb au sommet; le point *s*, où le fil à plomb vient toucher le plan horizontal, est la projection horizontale. La longueur du fil donnera l'élévation *αs'*.

Problème VIII.

86. *Construire les projections d'une pyramide dont la base repose sur un plan* PQR *perpendiculaire au plan vertical.*

Faisons tourner le plan PQR (fig. 12, pl. II) autour de sa trace

horizontale PQ pour le rabattre sur le plan horizontal. Avec les arêtes mesurées, construisons dans ce plan rabattu la base ABCDE et les deux faces latérales CDS_1, DES_2; on déterminera comme dans le problème précédent, le pied I de la perpendiculaire abaissée du sommet de la pyramide sur la base et la longueur IS_3 de cette perpendiculaire. Ramenons maintenant le plan de la base dans sa position primitive. On déterminera la projection horizontale *abcde* de cette base et les projections *i* et *i'* du point I, pied de la perpendiculaire abaissée du sommet sur la base. Cette perpendiculaire, étant parallèle au plan vertical, se projette en vraie grandeur suivant la droite *i's'* perpendiculaire à QR et égale à IS_3; on a ainsi la projection verticale *s'* du sommet; on en déduit la projection horizontale *s*.

Problème IX.

87. *Construire les projections d'un prisme droit dont la base repose sur le plan horizontal.*

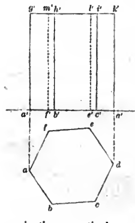


Fig. 80.

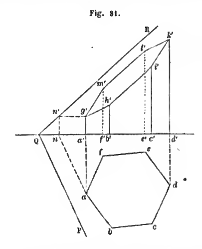
S'il s'agit d'un prisme hexagonal (fig. 80), on mesurera les côtés de la base, trois diagonales *ac*, *ad*, *ae*, et la hauteur du prisme. On construira ensuite la base *abcdef* sur le plan horizontal à l'échelle convenue, et, sur une perpendiculaire à la ligne de terre, on portera la hauteur *a'g'* du prisme. La base supérieure coïncide en projection horizontale avec la base inférieure; la projection verticale *g'k'* est parallèle à la ligne de terre. Les arêtes latérales du prisme ont leurs projections verticales perpendiculaires à la ligne de terre.

Problème X.

88. *Construire les projections d'un tronc de prisme.*

On donne un prisme droit dont la base repose sur le plan horizontal (fig. 81). Un plan quelconque PQR coupera ce prisme suivant un polygone dont la projection horizon-

Fig. 81.



tale coïncidera avec la base inférieure; il s'agit de construire la projection verticale. La question revient à trouver les points où les arêtes verticales du prisme percent le plan sécant PQR.

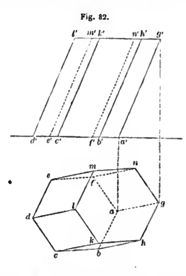
Par l'arête verticale *a* menons un plan vertical *ann'* parallèle à la ligne PQ; ce plan coupera le plan PQR suivant une horizontale *na*, *n'g'*, dont l'intersection avec l'arête donnera le point *g'* où cette arête perce le plan PQR. On procédera de la même manière pour les autres arêtes, et l'on aura ainsi la projection verticale *g'h'i'k'l'm'* de la base supérieure du tronc de prisme.

Problème XI.

89. *Construire les projections d'un prisme oblique dont la base repose sur le plan horizontal.*

Après avoir mesuré les côtés de la base et les diagonales qui permettent de construire la base inférieure *abcdef* (fig. 82), on déterminera l'un des sommets G de la base supérieure à l'aide

Fig. 82.



du fil à plomb, et, partant du sommet *g*, on construira le polygone *ghklmn* égal au précédent.

Problème XII.

90. *Construire les projections d'un solide quelconque.*

Supposons que l'une des faces *abcde* (fig. 13, pl. II) du solide repose sur le plan horizontal; on commencera par déterminer cette base du solide en mesurant ses côtés et des diagonales en nombre suffisant; deux perpendiculaires à la ligne de terre,

telles que *aa'* et *dd'*, fixeront sa position dans le plan. On déterminera ensuite la position dans l'espace de l'un des autres sommets F, en le considérant comme le sommet d'un tétraèdre ayant pour base le triangle *abe;* il suffira de mesurer les trois distances *a*F, *b*F, *e*F.

Après avoir construit sur l'épure le polygone de base *abcde*, on construira les deux triangles abF_1, aeF_2, rabattements des deux triangles *ab*F, *ae*F. Si l'on imagine ces deux triangles relevés, les deux perpendiculaires F_1f, F_2f, abaissées des points F_1 et F_2 sur les droites *ab* et *ae*, donneront la projection horizontale *f* du sommet F. Le triangle rectangle αfF_3 dont l'hypothénuse αF_3 est égale à αF_1, fera connaître l'élévation fF_3 de ce sommet au-dessus du plan horizontal, et par suite sa projection verticale *f'*. On procédera de même pour chacun des autres sommets; par exemple le sommet G sera considéré comme le sommet d'un tétraèdre ayant pour base le triangle *abc*, et ainsi de suite.

Le solide représenté par la figure 13 est un tronc de pyramide. On le reconnaît en ce que les arêtes latérales (*af*, *a'f'*), (*bg*, *b'g'*), etc., prolongées, concourent en un même point (*s*, *s'*), qui est le sommet de la pyramide. En outre, la face supérieure, ayant pour projection verticale une droite *f'i'* parallèle à la ligne de terre est parallèle au plan horizontal. Le solide est donc un tronc de pyramide à bases parallèles. Mais la méthode suivie s'applique à un solide quelconque.

Problème XIII.

91. *Trouver l'intersection de deux polyèdres.*

Pour déterminer l'intersection de deux polyèdres P, P', on considère une face A du premier polyèdre et une face A' du second, et l'on construit la droite d'intersection des plans de ces deux faces; si cette droite n'a aucune partie à la fois dans les deux faces A et A', elle n'appartient pas à la ligne d'intersection; mais si une portion *ab* de cette ligne est située à la fois dans les faces A et A', cette portion de droite *ab* est un élément de

la ligne d'intersection. Le point *b* appartient à une arête de la face A ou à une arête de la face A'; supposons qu'il appartienne à une arête de la face A'; pour trouver l'élément suivant de la ligne d'intersection, on prendra l'intersection de la face A du polyèdre P et de la face B' du polyèdre P' qui a avec la face A' une arête commune passant par le point *b*; la portion *bc* située à la fois dans les faces A et B' est le second élément de la ligne d'intersection. Si le point *c* appartient à une arête de la face B', on obtiendra l'élément suivant en prenant l'intersection de la face A du premier polyèdre et de la face du second polyèdre qui a avec la face B' une arête commune passant par le point *c*; si au contraire le point *c* appartient à une arête de la face A, on prendra l'intersection de la face B' du second polyèdre et de la face du premier polyèdre qui a avec la face A une arête commune passant par le point *c*. En continuant ainsi, on reviendra nécessairement au point *a*, après avoir décrit une ligne polygonale fermée *abc....a*. La ligne d'intersection des deux polyèdres peut comprendre une ou plusieurs lignes fermées, telles que *abc....a*.

92. Appliquons cette méthode à la recherche de la ligne d'intersection d'un prisme droit dont la base *abcde* repose sur le plan horizontal, et d'une pyramide triangulaire ayant pour base le triangle *qrs* situé dans le plan horizontal, et pour sommet le point (*o*, *o'*). (Fig. 15, pl. III.)

On voit ici, à la seule inspection de la figure, que les faces latérales *ab* et *cd* du prisme, ne rencontrent pas la pyramide, et que la ligne d'intersection se compose de deux lignes distinctes, savoir une ligne plane située dans la face latérale *bc*, et une ligne gauche située dans les faces latérales *ae* et *ed*. La ligne plane située dans la face *bc* du prisme, est le triangle (*fgh*, *f'g'h'*), dont on obtient les projections sans difficulté. Cherchons maintenant la ligne gauche; la face latérale *ae* du prisme coupe la face (*oqr*, *o'q'r'*) de la pyramide suivant une droite dont la partie *kl*, *k'l'*, située à la fois dans les faces des deux polyèdres, est un élément de la ligne d'intersection. Le

point (*l*, *l'*) appartenant à l'arête (*oq*, *o'q'*) de la pyramide, pour avoir l'élément suivant, on prendra l'intersection de la même face *ae* du prisme et de la face (*oqs*, *o'q's'*) de la pyramide; les plans de ces faces se coupent suivant la droite (*lt*, *l't'*); la partie (*le*, *l'm'*) située dans les deux faces, est le second élément de la ligne d'intersection. Le point (*e*, *m'*) appartenant à l'arête verticale *e* du prisme, pour avoir l'élément suivant, on prendra l'intersection de la face (*oqs*, *o'q's'*) de la pyramide et de la face *ed* du prisme; la portion (*en*, *m'n'*), située dans ces deux faces, est le troisième élément de la ligne cherchée. Le point (*n*, *n'*) étant sur l'arête (*os*, *o's'*) de la pyramide, nous prendrons maintenant l'intersection de la face *ed* du prisme et de la face (*osr*, *o's'r'*) de la pyramide; les plans de ces faces se coupent suivant la droite (*nu*, *n'u'*); la portion (*ne*, *n'p'*) située dans les deux faces considérées, est le quatrième élément de la ligne cherchée. Enfin le point (*e*, *p'*) étant sur l'arête *e* du prisme, on prendra l'intersection de la face (*osr*, *o's'r'*) de la pyramide et la face *ea* du prisme, ce qui donne l'élément (*ek*, *p'k'*); on revient ainsi au point de départ (*k*, *k'*) et l'opération est terminée.

93. Cherchons ce que devient la ligne d'intersection lorsqu'on développe la surface de l'un des deux polyèdres sur un plan.

Si on fend le prisme suivant l'arête latérale *c*, et si on applique la surface développée sur le plan vertical, les faces latérales *cb*, *ba*, *ae*, *ed* du prisme se placeront en $c'b_1$BC, b_1a_1AB, etc. On obtiendra la position N du point (*n*, *n'*) situé dans la face *de*, en portant sur la ligne de terre, à partir du point c_1, une longueur c_1n_1 égale à *cdn* et prenant sur une perpendiculaire à la ligne de terre n_1N égale à *vn'*. En opérant de même pour chacun des sommets de la ligne d'intersection, on aura sur le développement les deux lignes FGH, KLMNP.

Ouvrons maintenant la pyramide suivant l'arête *oq*, *o'q'*, et développons la surface latérale sur le plan vertical, en plaçant l'arête *oq*, (*o'q'*) sur *o'q'*; le triangle (*oqr*, *o'q'r'*) s'applique sur le triangle $o'q_1r_1$ que l'on construit après avoir déterminé les

longueurs des trois côtés. De même les triangles (ors, $o'r's'$), (osq, $o's'q'$) s'appliquent sur les triangles $o'r_1s_1$, $o's_1q_2$, et la surface latérale de la pyramide se développe suivant le secteur polygonal $o'q_1r_1s_1q_2$. Pour obtenir la position N_1 du point (n, n') situé sur l'arête (os, $o's'$), il suffit de prendre sur $o's_1$, à partir du point o', une longueur $o'N_1$ égale à la distance des points (o, o'), (n, n'). On déterminera ainsi les deux points où chacun des éléments de la ligne d'intersection, prolongé si cela est nécessaire, rencontrent les arêtes de la face de la pyramide dans laquelle il est situé, et l'on aura, sur le développement de la pyramide, les deux lignes $G_1F_1H_1G_2$, $L_1K_1P_1N_1M_1L_2$.

Problème XIV.

94. *Construire les projections d'un tétraèdre régulier.*

On appelle *polyèdre régulier*, un polyèdre formé avec des polygones réguliers, assemblés en même nombre autour de chaque sommet.

Le plus simple des polyèdres réguliers est le *tétraèdre régulier*, qui est formé avec *quatre* triangles équilatéraux, assemblés trois à trois autour de chaque sommet. Le tétraèdre a quatre faces et quatre sommets.

Nous supposerons que la base bcd (fig. 16, planche IV) repose sur le plan horizontal. Les trois faces latérales sont égales au triangle de base; on les construira rabattues sur le plan horizontal. En relevant ces faces, et procédant comme s'il s'agissait d'une pyramide triangulaire quelconque (problème VI), on obtiendra la projection horizontale a du sommet, qui coïncide ici avec le centre du cercle inscrit ou du cercle circonscrit au triangle de base, puis la hauteur aA, qui donnera la projection verticale a' du sommet.

Si l'on imagine la surface du tétraèdre fendue suivant les trois arêtes latérales, et développée sur le plan de la base, il est aisé de voir que les quatre triangles équilatéraux qui la composent forment un triangle équilatéral $A_1A_2A_3$.

PROBLÈME XV.

95. *Construire les projections d'un hexaèdre régulier.*

Après le tétraèdre régulier, vient l'hexaèdre régulier ou le cube, qui est formé avec *six* carrés égaux, assemblés trois à trois autour de chaque sommet. L'hexaèdre a six faces et huit sommets.

La figure 17, planche IV, représente un cube posé sur le plan horizontal. Elle montre aussi le développement de la surface du cube, supposée fendue suivant les quatre arêtes latérales et suivant les trois arêtes *ef*, *fg*, *gh* de la base supérieure, et développée sur le plan horizontal.

PROBLÈME XVI.

96. *Construire les projections d'un octaèdre régulier.*

L'octaèdre régulier est formé avec *huit* triangles équilatéraux, assemblés quatre à quatre autour de chaque sommet. L'octaèdre a huit faces et six sommets.

L'octaèdre régulier, représenté par la figure 18, planche IV, a l'une de ses diagonales *a'b'* verticale. On peut concevoir ce solide comme formé de la réunion de deux pyramides régulières égales, ayant pour base commune le carré horizontal *cdef*, et pour sommet, l'une le point *a'*, l'autre le point *b'*. On a mesuré la longueur de l'arête; on construira donc avec ce côté, sur le plan horizontal, le carré *cdef*, projection du carré horizontal dont nous venons de parler. Les diagonales étant égales entre elles et *ce* étant une d'elles, on prendra *a'b'* égale à *ce*, et l'on aura ainsi la projection de la diagonale verticale. Si, par le milieu de *a'b'*, on mène une parallèle *c'e'* à la ligne de terre, on aura la projection verticale du carré *cdef*, et par suite, les quatre autres sommets de l'octaèdre.

Tout plan mené par deux arêtes opposées coupe le solide suivant un carré; tel est le plan horizontal *c'e'*. Les deux plans

verticaux menés par ce et df déterminent aussi des carrés, qui se projettent sur le plan vertical suivant les losanges $a'c'b'e'$, $a'd'b'f'$.

La figure 19 représente le développement de la surface de l'octaèdre régulier. La surface a été fendue suivant $a'd'b'$ et $cdef$, puis développée sur le plan horizontal.

Problème XVII.

97. *Construire les projections d'un dodécaèdre régulier.*

Le dodécaèdre régulier est formé avec *douze* pentagones réguliers, assemblés trois à trois autour de chaque sommet.

Nous supposerons que le solide repose sur le plan horizontal par sa face $abcde$ (fig. 20, pl. IV), et que le côté cd de cette face est parallèle à la ligne de terre. Imaginons que deux faces latérales adjacentes $af_1g_1h_1b$, $af_2p_1o_1e$ soient rabattues sur le plan horizontal; ce sont deux pentagones réguliers que l'on construira. Relevons maintenant ces deux pentagones en les faisant tourner, le premier autour de ab, le second autour de ae, jusqu'à ce que les deux côtés af_1 et af_2 se rejoignent. Nous voyons par là que le sommet F du solide aura pour projection horizontale le point f, intersection des deux perpendiculaires f_1f et f_2f, abaissées des points f_1 et f_2 sur les axes de rotation ab et ae. On obtiendra son élévation au-dessus du plan horizontal, en rabattant le plan vertical mené par αf, et construisant le triangle rectangle αfF, dans lequel l'hypoténuse αF est égale à αf_2; le côté fF donne l'élévation du sommet F : prenant donc sur une perpendiculaire à la ligne de terre une longueur $a'f'$ égale à fF, on aura la projection verticale f' du sommet F.

Le point p_1, où le côté g_1f_1 va rencontrer l'axe ba prolongé, reste immobile quand on relève le pentagone : le point f_1 venant en f, la droite p_1f_1 se projette en p_1f; d'ailleurs le point g_1 se meut sur une droite g_1g perpendiculaire à ab. L'intersection de ces deux droites p_1f et g_1g donnera la projection horizontale g du sommet G. L'élévation de ce sommet sera donnée par le côté gG du triangle rectangle βgG, dont l'hypoténuse βG est égale à

βg_1 : menant du point g une perpendiculaire à la ligne de terre, et prenant sur cette perpendiculaire une longueur $b'g'$ égale à gG, on aura la projection verticale g' du sommet G.

On pourrait construire ainsi directement les projections de chacun des sommets des polygones adjacents au polygone de base. Mais on abrégera beaucoup les constructions en remarquant que, à cause de la régularité du solide, les sommets F, H, K, M, O sont à la même hauteur au-dessus du plan horizontal; leurs projections horizontales f, h, k, m, o forment un pentagone régulier, ayant même centre que le pentagone de base et les sommets correspondants sur les mêmes rayons. Les projections verticales sont sur une même parallèle $o'h'$ à la ligne de terre. De même, les sommets G, I, L, N, P sont à la même hauteur au-dessus du plan horizontal; leurs projections horizontales g, i, l, n, p forment également un pentagone régulier, et leurs projections verticales sont sur une même parallèle $n'i'$ à la ligne de terre.

Voilà en quelque sorte la moitié inférieure du dodécaèdre; elle est terminée par la ligne dentelée $f'g'h'i'k'l'm'n'o'p'f'$ que l'on suit très-bien sur la projection verticale. La moitié supérieure est égale à la moitié inférieure; elle est terminée par la même ligne dentelée, les angles saillants de l'une s'engageant dans les angles rentrants de l'autre. La face supérieure, parallèle au plan horizontal, a pour projection horizontale le pentagone régulier $qrstu$, inscrit dans le même cercle que la face inférieure $abcde$, et de telle sorte, que les sommets des deux polygones divisent la circonférence en dix parties égales. On en obtient la projection verticale $s'u'$, parallèle à la ligne de terre, en prenant $l't'$ égale à $a'f'$. L'égalité des deux parties fait voir que les dix sommets de la ligne dentelée forment en projection horizontale un décagone régulier.

La figure 21 représente le développement du dodécaèdre.

Problème XVIII.

98. *Construire les projections d'un icosaèdre régulier.*

L'icosaèdre régulier est formé par *vingt* triangles équilatéraux assemblés cinq à cinq autour de chaque sommet. Nous supposons la diagonale *a'b'* (fig. 22, pl. IV) verticale. L'icosaèdre se compose, à la partie inférieure d'une pyramide ayant pour sommet *a'*, et pour base le pentagone *cdefg*, à la partie supérieure d'une pyramide égale ayant pour sommet *b'* et pour base le pentagone *hiklm*, et enfin d'un solide compris entre les plans parallèles des deux pentagones et limité latéralement par dix triangles inclinés alternativement dans un sens et en sens contraire sur ces bases parallèles.

La base de la pyramide inférieure se projette sur le plan horizontal suivant un pentagone régulier *cdefg*, ayant pour centre le point *a*, et que l'on peut construire, puisqu'on connaît son côté qui est égal aux arêtes de l'icosaèdre. La base de la pyramide supérieure se projettera suivant un pentagone *hiklm*, inscrit dans le même cercle que le précédent, et de manière que les sommets des deux pentagones partagent la circonférence en dix parties égales. La hauteur de la pyramide inférieure sera donnée par le côté *c*C du triangle rectangle *ac*C, dans lequel le côté *ac* est le rayon du cercle circonscrit au pentagone, et l'hypoténuse *a*C est égal au côté du pentagone, ou à l'arête du solide (ce triangle est le rabattement du plan projetant l'arête *a*C); sur une perpendiculaire à la ligne de terre, on prendra donc *a'c'* égale à *c*C, et l'on mènera, par le point *c'*, une parallèle *d'g'* à la ligne de terre.

Il s'agit maintenant de trouver la hauteur du solide intermédiaire. Faisons tourner l'une des faces latérales *dem* autour de *de*, jusqu'à ce qu'elle devienne horizontale; elle se projettera alors en vraie grandeur suivant le triangle équilatéral dem_1; la hauteur de ce triangle est αm_1; le côté *m*M du triangle rectangle α*m*M, dans lequel l'hypoténuse αM égale αm_1, donnera l'élévation du point M au-dessus de la base de la pyramide inférieure, ou l'épaisseur du solide intermédiaire; à une distance *c'h'* égale

à mM, on mènera donc une parallèle $m'i'$ à $d'g'$, et l'on aura la base de la pyramide supérieure; on prendra ensuite $h'b'$ égale à $a'c'$ pour avoir le sommet b'.

La figure 23 montre le développement de l'icosaèdre. Autour des points a et b, on voit les développements des surfaces latérales des deux pyramides; la bande $ggkk$ provient de la portion intermédiaire.

99. Remarque. Il n'existe pas d'autre polyèdre régulier que les cinq dont nous avons parlé. Il est facile de s'en rendre compte. On sait en effet que la somme des faces d'un angle polyèdre quelconque est toujours moindre que quatre angles droits (*Théorie*, liv. V, th. 30). La somme des angles disposés autour d'un même sommet doit donc être moindre que quatre angles droits. L'angle du triangle équilatéral vaut les $\frac{2}{3}$ d'un angle droit; on pourra donc former des solides en assemblant des triangles équilatéraux, soit trois à trois, soit quatre à quatre, soit cinq à cinq, autour de chaque sommet; dans ce dernier cas, la somme des angles autour de chaque sommet est égale à $\frac{10}{3}$ d'angle droit, et par conséquent moindre que quatre angles droits; mais si l'on assemble les triangles six à six, la somme étant égale à quatre angles droits, l'angle polyèdre devient plan, et le solide n'existe plus. Il est tout à fait impossible d'assembler les triangles sept à sept, huit à huit, etc.; car alors la somme des angles autour de chaque sommet serait plus grande que quatre angles droits. Ces trois manières d'assembler les triangles donnent le tétraèdre, l'octaèdre et l'icosaèdre.

On ne peut assembler les carrés que d'une seule façon, trois à trois, ce qui donne le cube ou l'hexaèdre.

On ne peut assembler de même les pentagones réguliers que d'une façon, trois à trois, ce qui donne le dodécaèdre.

Il est impossible de former un solide avec des hexagones réguliers; car l'angle de l'hexagone vaut les $\frac{4}{3}$ d'un angle droit; pour former un angle solide, il en faudrait mettre trois au moins, ce qui donnerait quatre angles droits. L'impossibilité est encore plus manifeste avec les heptagones, etc.

Ainsi, il n'existe que cinq polyèdres réguliers :
Le *tétraèdre*, qui a 4 faces, 4 sommets et 6 arêtes,
L'*hexaèdre*, qui a 6 faces, 8 sommets et 12 arêtes;
L'*octaèdre*, qui a 8 faces, 6 sommets et 12 arêtes;
Le *dodécaèdre*, qui a 12 faces, 20 sommets et 30 arêtes;
L'*icosaèdre*, qui a 20 faces, 12 sommets et 30 arêtes.

On aperçoit une corrélation très-remarquable entre ces polyèdres. L'hexaèdre et l'octaèdre ont chacun 12 arêtes; le nombre des faces de l'un est égal à celui des sommets de l'autre, et réciproquement. Le dodécaèdre et l'icosaèdre ont chacun 30 arêtes; le nombre des faces de l'un est encore égal à celui des sommets de l'autre. Le tétraèdre se correspond à lui-même.

Plan, élévation, coupe.

100. Le mode de projection développé précédemment peut encore être appliqué à la représentation géométrique de la forme extérieure d'un bâtiment ou d'une machine. La projection horizontale se nomme alors *plan*, la projection verticale *élévation*. Pour que ces projections aient toute la netteté désirable, on est souvent obligé de ne représenter sur une même figure que la projection d'une partie du bâtiment ou de la machine; de sorte que l'ensemble exige plusieurs plans et plusieurs élévations.

Mais les plans et les élévations ne font connaître ni la distribution intérieure du bâtiment, ni la disposition des différentes pièces de la machine. On en complète la représentation géométrique à l'aide de *coupes* ou sections faites par des plans horizontaux ou verticaux convenablement choisis.

101. Pour représenter un bâtiment et faire connaître tous les détails de sa distribution intérieure, on construit le plan de chaque étage, l'élévation de chaque face sur un plan parallèle au plan de cette face, et une coupe verticale perpendiculaire au plan de la façade principale.

Les figures 1, 2, 3, planche V, représentent le plan du rez-

de-chaussée d'une maison, l'élévation de sa face principale, et une coupe verticale suivant la ligne *ab*.

Tous ces plans sont levés par la méthode du levé au mètre; par exemple, pour lever le plan du rez-de-chaussée, on choisit pour base la droite *ab*, qui passe par le milieu des portes des faces principales, traverse toute la maison et rencontre les traces horizontales des murs prolongés aux points *d*, *f*, *k*, dont on mesure les distances au point *a*, milieu de l'arête de la première marche de l'escalier. On détermine les points *g* et *g'*, *h* et *h'*, en mesurant leurs distances aux points *d* et *f*, les points *l* et *l'* en mesurant leurs distances aux points *f* et *k* : on construit ces points et on trace les droites *gdg'*, *hfh'*, *lkl' ghl*, *g'h'l'*; on mesure les épaisseurs des murs aux ouvertures, les distances *gp*, *g'p'*, *lq*, *l'q'*; on marque les points *p*, *p'*, *q*, *q'* et on achève le tracé des murs en admettant que les faces d'un même mur sont parallèles. On détermine les extrémités *c* et *c'* de la première marche de l'escalier, en mesurant leurs distances au point *a* et au point *m*, pris sur le prolongement de *ba* à une distance connue de *a*. Comme vérification, on mesure les distances des points *c'* et *e'* aux coins voisins de la maison. Les arêtes des autres marches étant parallèles à *cc'*, il suffit pour les déterminer de mesurer les distances du point *a* aux points où elles sont rencontrées par la droite *ab*.

On lève le second escalier de la même manière; le levé des ouvertures et autres détails ne présente aucune difficulté.

On opère de même pour une élévation ou une coupe, en s'aidant, pour prendre les mesures nécessaires, d'une échelle et d'un fil; on peut d'ailleurs simplifier ces opérations en admettant que les arêtes des murs, des portes et des fenêtres sont verticales, et les lignes d'assise horizontales.

102. Pour faire le levé d'une machine, il faut avant tout examiner, avec un grand soin, quels sont les plans suivant lesquels on obtient les élévations et les coupes qui permettent le mieux de mettre en évidence les pièces importantes de la machine. Quant aux mesures nécessaires à la construction d'un dessin, on

les obtient aisément à l'aide d'un fil, du compas ordinaire, d'un compas d'épaisseur et d'un mètre.

Les figures 4, 5, 6, Pl. V, représentent le plan, une élévation, et une coupe verticale d'une pompe à incendie.

La coupe verticale (fig. 5) fait voir comment, sous l'action du balancier DD, les deux pompes B, B puisent l'eau dans la caisse A pour l'amener dans le réservoir à air C, d'où la pression de l'air la chasse dans le conduit E, par lequel elle s'échappe en jet continu. Le plan (fig. 4) achève de faire comprendre la disposition des différentes parties de la machine par leur projection sur un plan horizontal. Enfin, l'élévation (fig. 6) montre la forme extérieure de tout l'appareil.

Nous engageons les élèves à exécuter ainsi le levé des principales machines qui se trouvent dans les cabinets de physique, et parmi lesquelles nous citerons la machine pneumatique, la machine d'Atwood, le calorimètre de Laplace et Lavoisier, et les roues hydrauliques.

CHAPITRE VII.

PLANS COTÉS.

Définitions.

103. Pour représenter un terrain, on projette les points remarquables sur un plan horizontal; la figure formée par ces projections est ce qu'on appelle le *plan* du terrain. On détermine en outre les cotes de ces points, c'est-à-dire leurs hauteurs au-dessus du plan horizontal de projection. A l'aide de ces cotes on pourrait construire les projections des différents points sur un plan vertical; mais, comme la projection verticale du terrain présenterait une grande confusion, on se dispense de la construire, et on y supplée en écrivant simplement la cote de chaque point près de sa projection horizontale. Un plan, sur lequel on a inscrit de cette manière les cotes des points remarquables, est un *plan coté.*

104. Les cotes suffisent pour déterminer les lignes bien définies, telles que lignes de séparation, traces de murs ou de bâtiments sur le sol, et un certain nombre de points remarquables. Mais, pour déterminer la surface d'un terrain ondulé, on imagine un certain nombre de plans horizontaux équidistants, qui coupent la surface du sol suivant des lignes appelées *sections horizontales* ou *courbes de niveau;* on projette ces lignes sur le plan horizontal de projection, et on les rapporte sur le papier, où chacune est représentée par sa projection et une cote *unique.* On obtient ainsi sur le plan un dessin qui représente un certain nombre de lignes tracées sur la surface, et montre aux yeux, d'une manière très-expressive, la forme générale et le mouvement de la surface du terrain.

Les plans horizontaux, suivant lesquels on coupe la surface du sol, sont choisis de manière à avoir pour cotes des nombres entiers; on les prend à 1^m, 2^m, 4^m, 5^m, 10^m, les uns des autres,

suivant l'étendue et la pente du terrain qu'on veut représenter, et le degré de précision qu'exige le but pour lequel on effectue le nivellement.

105. Sur un plan coté, un point est représenté par sa projection et sa cote. Pour faciliter les explications, nous emploierons les notations de la géométrie descriptive; nous désignerons les points de l'espace par de grandes lettres A, B, C,... (fig. 83), leurs projections sur le plan horizontal par les petites lettres correspondantes *a*, *b*, *c*,... Pour représenter sur un plan coté le point A,

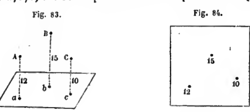


Fig. 83. Fig. 84.

on marque un point sur le papier en *a*, et à côté on inscrit la valeur numérique de la cote. Ainsi les points 12, 15, 10 (fig. 84), désignent les points A, B, C, qui ont leurs projections aux points marqués à côté de ces nombres, et dont les cotes sont 12^m, 15^m et 10^m.

Une droite est représentée par sa projection et les cotes de deux de ses points. Soient A et B deux points d'une droite (fig. 85); on marque sur le papier les projections *a* et *b* de ces

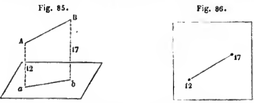


Fig. 85. Fig. 86.

deux points; on inscrit à côté leurs cotes, puis on les joint par une ligne droite (fig. 86).

Lorsque la droite est horizontale, tous ses points ont même cote. Lorsqu'elle est verticale, sa projection est un point.

PROBLÈME I.

106. *Connaissant la cote d'un point situé sur une droite donnée, trouver la projection de ce point.*

Sur une droite donnée AB, définie par les cotes Aa et Bb des deux points A et B, il s'agit de trouver la position du point C, connaissant sa cote Cc (fig. 87).

Fig. 87.

Pour fixer les idées, supposons Bb>Aa. Si Cc>Aa, le point c est à droite de a sur ab. Par le point A menons une parallèle à ab; elle coupe Bb en B', et Cc en C'; les triangles ACC', ABB' étant semblables, on a

$$\frac{AC'}{AB'}=\frac{CC'}{BB'};$$

mais $\quad AC'=ac, \quad AB'=ab;$

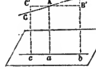
d'ailleurs $\quad CC'=Cc-Aa, \quad BB'=Bb-Aa;$

donc $$ac=ab\times\frac{Cc-Aa}{Bb-Aa}.$$

La longueur ac détermine la position du point c.

Si Cc est <Aa, le point c est à gauche de a sur ab (fig. 88), En menant par le point A une parallèle AB' à ab, on a encore deux triangles semblables ACC', ABB', qui donnent

Fig. 88.



$$\frac{AC'}{AB'}=\frac{CC'}{BB'},$$

d'où $$ac=ab\times\frac{Aa-Cc}{Bb-Aa}.$$

La première formule est applicable dans les deux cas, si l'on convient de regarder la longueur ac comme positive quand elle

est portée à droite de a, comme négative quand elle est portée à gauche.

Enfin, si $Bb < Aa$, il est facile de voir que la même formule est encore applicable, quelle que soit Cc, en interprétant de la même manière la valeur positive ou négative de ac.

Problème II.

107. Réciproquement, *trouver la cote d'un point située sur une droite donnée.*

La droite donnée est toujours définie par les cotes de deux de ses points A et B. On demande la cote d'un point C pris sur cette droite. Supposons d'abord $Bb > Aa$. Si le point c est à droite de a, la cote Cc est plus grande que Aa (fig. 87). En menant par le point A, comme précédemment, une parallèle à ab, on a deux triangles semblables ABB', ACC', qui donnent

$$\frac{CC'}{BB'} = \frac{AC'}{AB'};$$

on en déduit

$$Cc - Aa = CC' = (Bb - Aa) \times \frac{ac}{ab};$$

d'où

$$Cc = Aa + (Bb - Aa) \times \frac{ac}{ab}.$$

Si le point c est à gauche de a, sa cote Cc est $< Aa$ (fig. 88), et l'on a

$$Cc = Aa - (Bb - Aa) \times \frac{ac}{ab}.$$

Cette formule rentre dans la précédente, en regardant comme négative la longueur ac qui est ici portée à la gauche de a.

On voit aisément que la même formule est encore applicable quand $Bb < Aa$, quelle que soit la position du point c, pourvu qu'on fasse toujours la même convention sur le signe de ac.

Problème III.

108. *Trouver la pente d'une droite.*

On appelle *inclinaison* d'une droite l'angle aigu que fait cette droite avec sa projection sur un plan horizontal. On appelle *pente* de la droite, la tangente trigonométrique de l'inclinaison. D'après cela, la pente est nulle quand l'inclinaison est nulle, c'est-à-dire quand la droite est horizontale; la pente varie de 0 à 1 quand l'inclinaison varie de 0 à 45°, et de 1 à ∞ quand l'inclinaison varie de 45° à 90°. La pente est infinie quand la droite est verticale.

Fig. 89.

Soient A et B deux points d'une droite, a et b leurs projections (fig. 89). En désignant par p la pente de cette droite, par i son inclinaison, on a $p = \text{tang}\, i$. Par le point A menons AB' parallèle à ab; le triangle BAB' donne $BB' = AB' \times \text{tang BAB'}$. L'angle BAB' est l'inclinaison de la droite, la tangente de cet angle est la pente; on a donc

$$p = \text{tang}\, i = \frac{Bb - Aa}{ab}.$$

Ainsi, *la pente d'une droite est égale au rapport de la différence de niveau de deux points de cette droite à la distance horizontale de ces deux points.*

Problème IV.

109. *Construire l'échelle de pente d'une droite.*

De la même formule on déduit

$$ab = \frac{Bb - Aa}{p}.$$

Ainsi, *lorsqu'on divise la différence de niveau de deux points d'une droite par la pente de la droite, on obtient la distance horizontale de ces deux points.*

On voit par là que, si l'on prend sur une droite quelconque AB (fig. 90) une série de points M, N, P, Q, tels que la différence de niveau de deux points consécutifs soit constante et égale à h, la distance horizontale d de deux points consécutifs est aussi constante et égale à $\frac{h}{p}$.

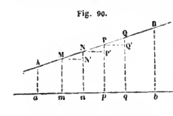


Fig. 90.

En particulier, si on fait $h = 1^{m}$, on a

$$d = \frac{1}{p}.$$

Ainsi, *la distance horizontale de deux points d'une droite dont la différence de niveau est* 1^{m}, *est l'inverse de la pente de la droite.* Et réciproquement, *la pente d'une droite est l'inverse de la distance horizontale de deux points de cette droite dont la différence de niveau est* 1^{m}.

Si l'on considère les points d'une droite qui ont pour cotes des nombres entiers consécutifs, leurs projections partagent la projection de la droite en parties égales; et ces parties sont d'autant plus petites que la droite a une plus grande pente. Ce mode de division de la projection de la droite constitue ce que l'on nomme l'*échelle de pente de la droite.*

110. Étant données les projections a, b, et les cotes Aa, Bb de deux points A, B d'une droite, il est facile de construire l'échelle de pente de cette droite. On cherchera d'abord la projection m d'un point M ayant une cote entière Mm, au moyen de la formule

$$am = ab \times \frac{Mm - Aa}{Bb - Aa},$$

établie au n° **106.**

A partir de ce point m, on portera ensuite à droite et à gauche sur ab, à la suite les unes des autres, des longueurs égales à la distance horizontale de deux points de la droite dont la

différence de niveau est 1^m, distance égale à $\frac{1}{p}$, c'est-à-dire à $\frac{ab}{Bb - Aa}$; les points de division ainsi obtenus ont pour cotes les nombres entiers consécutifs ascendants ou descendants. Ordinairement on partage l'une quelconque de ces divisions en 10 parties égales.

On connaît, par exemple (fig. 91), deux points ayant pour

Fig. 91.

48 48.67 49 50 51 51.48 52 53

cotes $48^m,67$ et $51^m,48$ dont la distance horizontale est 53^m, la distance du point 48,67 au point qui a pour cote le nombre entier 49, est $56 \times \frac{0,33}{51,48 - 48,67} = 6^m,2$ et la longueur de chaque division de l'échelle de pente est $56 \times \frac{1}{51,48 - 48,67} = 19^m,9$.

111. L'échelle de pente une fois construite, on peut s'en servir pour résoudre immédiatement ce double problème : *Connaissant la cote d'un point situé sur une droite donnée, trouver la projection de ce point, et* vice versa.

Supposons l'échelle de pente de la droite construite (fig. 92);

Fig. 92.

48 49 50 m 51 52

on demande, par exemple, la projection m du point qui a pour cote $50^m,34$. Ce point m est entre les points 50 et 51, à une distance du point 50 qui est les 0,34 d'une division de l'échelle de pente; sur la division qui a été partagée en 10 parties égales, prenez avec un compas une longueur qui comprend 3 de ces petites divisions, plus une fraction 0,4 de division que l'on évalue à vue d'œil; portez cette longueur sur la droite à partir du point 50 du côté de 51, vous aurez le point demandé.

Inversement, *étant donnée la projection* m *d'un point de la*

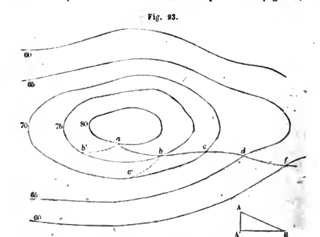
droite, trouver sa cote. On voit d'abord qu'elle est égale à 50^m, plus une fraction de mètre; on évalue cette fraction en prenant avec un compas la distance du point 50 au point *m*, et la portant sur la division de l'échelle partagée en 10 parties égales. On trouve 3 divisions, plus environ 0,4 de division ; la cote du point est donc 50^m,34.

PROBLÈME V.

112. *Trouver l'inclinaison d'un chemin tracé sur un plan coté.*

Soit *a b c d f* un chemin tracé sur un plan coté (fig. 93).

Fig. 93.

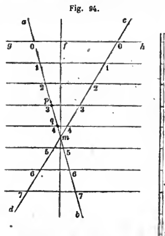


Pour trouver l'inclinaison du chemin entre les deux points A et B situés sur les courbes de niveau 80 et 75, que l'on suppose assez rapprochées pour que le chemin puisse être regardé comme sensiblement rectiligne dans cet intervalle, il suffit de construire un triangle rectangle BA'A, dans lequel le côté de l'angle droit A'B est égal à *ab*, et l'autre côté AA' à 5 mètres. L'angle ABA' est l'inclinaison du chemin. La pente du chemin entre les mêmes points est le quotient de 5 par la longueur *ab*.

Manière de représenter un plan.

113. Un plan est déterminé lorsqu'on donne deux droites situées dans ce plan. On pent donc représenter un plan quelconque, sur un plan coté, par les projections et les échelles de pente de deux droites situées dans ce plan. Telles sont (fig. 94) les droites *ab* et *cd*, projections de AB et de CD. Si l'on joint les points 0-0, 1-1, 2-2,... des droites *ab* et *cd*, on obtient les horizontales du plan qui ont pour cotes 0, 1, 2, ...; ces projections sont parallèles et équidistantes et peuvent être prises pour représenter le plan sur le papier; celle qui a pour cote 0 est la trace du plan sur le plan horizontal de projection.

Fig. 94.



Outre l'avantage de montrer aux yeux d'une manière très-expressive la position du plan, ces parallèles permettent encore de trouver immédiatement la pente d'une droite située dans le plan, quand on connaît la projection de cette droite. Soit, en effet, *ab* la projection d'une droite AB située dans le plan, *p* et *q* les points où elle rencontre les projections des horizontales 3 et 4, on obtient la pente de la droite en divisant la différence de niveau des points P et Q, c'est-à-dire 1^m, par la distance horizontale *pq* de ces points.

114. Il suit de là que, si par le point *m* du plan on mène dans ce plan une droite quelconque ayant pour projection *ma*, 1° la pente de cette droite est d'autant plus grande que la portion *pq*, comprise entre deux horizontales consécutives, est plus

petite; 2° de toutes les lignes que l'on peut mener par le point m dans le plan, celle qui a la plus grande pente est celle dont la projection mf est perpendiculaire aux projections des horizontales du plan. On a démontré (n° **19**) que, dans l'espace, cette ligne de plus grande pente est elle-même perpendiculaire aux horizontales du plan.

Étant donnée la projection de la ligne de plus grande pente d'un plan et son échelle de pente, il suffit, pour tracer les projections des horizontales équidistantes du plan, de mener par les points de division de la ligne de plus grande pente des perpendiculaires à cette ligne. Il y a un grand avantage à représenter un plan sur un plan coté par la projection de la ligne de plus grande pente, avec son échelle de pente. Cette échelle porte elle-même le nom d'*échelle du plan*, et pour la distinguer des échelles des droites, on la construit sur deux droites voisines et parallèles.

Problème VI.

115. *Trouver l'échelle d'un plan passant par trois points donnés.*

Soient a, b, c, les projections des trois points donnés. Sur la droite ab (fig. 95) je cherche le point c' dont la cote est la même que celle du point c, et je joins cc'; cette ligne est la projection d'une horizontale du plan. Je mène une perpendiculaire quelconque mn à cc', c'est la projection d'une ligne de plus grande pente du plan; cette ligne coupe l'horizontale cc' en un point c_1, dont la cote est la même que celle du point c; elle coupe aussi l'horizontale du plan mené par le point b en un point b_1, dont la cote est la même que celle du point b. On connaît ainsi les projections et les cotes de deux points b_1 et c_1 d'une ligne de plus grande pente; on peut construire l'échelle du plan (n° **110**).

Fig. 95.

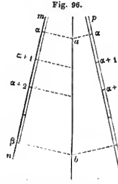
m
b
b_1
c'
a
c_1
c
n

Problème VII.

116. *Deux plans étant donnés par leurs échelles de pente, construire la projection et l'échelle de leur intersection.*

Soient mn, pq (fig. 96) les projections des lignes de plus grande pente des deux plans. Je conçois un plan horizontal dont la cote est α; il coupe le plan mn suivant une horizontale ayant pour projection la perpendiculaire à mn, menée par le point qui a pour cote α, et le plan pq suivant une horizontale qui a pour projection la perpendiculaire à pq, menée par le point de cette ligne qui a pour cote α. Ces deux horizontales, étant dans un même plan, se coupent en un point A, qui a pour projection a, pour cote α, et qui appartient à l'intersection des deux plans.

Fig. 96.



En imaginant de même un second plan horizontal ayant pour cote β, on obtient un second point B de l'intersection ayant pour projection b, et pour cote β.

On connaît ainsi deux points A et B de la ligne d'intersection par leurs projections et leurs cotes; il est facile de construire l'échelle de pente de cette droite. On l'obtient d'ailleurs immédiatement en menant par les points de division de l'échelle mn des perpendiculaires à mn; ces lignes coupent ab précisément aux points de division de l'échelle de ab.

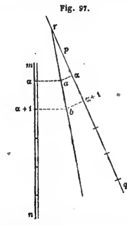
Problème VIII.

117. *Connaissant l'échelle de pente d'un plan, la projection et l'échelle d'une droite, trouver la projection et la cote du point où la droite perce le plan.*

Soient mn l'échelle de pente du plan, pq celle de la droite (fig. 97),

maginons le plan qui a pour échelle de pente pq, et construisons son intersection ab avec le plan mn. Prolongeons cette droite ab jusqu'à sa rencontre en r avec la droite pq; la droite AB dans l'espace, étant située dans un même plan avec la droite PQ (le plan dont l'echelle de pente est pq), rencontre cette ligne en un point R, qui a pour projection r; cette droite AB étant d'ailleurs située dans le plan mn, le point R appartient à la fois au plan mn et à la droite PQ; c'est le point cherché. On obtiendra facilement la cote de ce point au moyen de l'échelle de pente de la droite PQ.

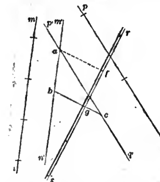
Fig. 97.



PROBLÈME IX.

118. *Trouver l'échelle de pente d'un plan passant par un point dont on donne la projection et la cote, et parallèle à deux droites dont on donne les projections et les échelles de pente.*

Fig. 98.



Soit a la projection du point donné A, dont nous représentons la cote par α; mn et pq les projections et les échelles des deux droites données (fig. 98). Par le point A, menons une droite M'N' parallèle à MN; sa projection $m'n'$ est parallèle à mn, et les divisions de son échelle de pente sont égales à celles de l'échelle de pente de mn; si donc on porte à partir du point a sur $m'n'$, dans un sens convenable, une longueur ab égale à l'une des divisions de l'échelle de pente de la ligne mn, on obtiendra la pro-

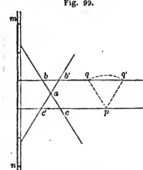
jection b du point B de M'N' qui a pour cote $\alpha+1$. Par le point A menons de même une droite P'Q' parallèle à PQ, et portons sur cette ligne à partir de a une longueur ac égale à l'une des divisions de pq, nous aurons la projection c du point C de la ligne P'Q' qui a pour cote $\alpha+1$. Le plan cherché contient les deux droites M'N', P'Q', et par suite l'horizontale BC qui s'appuie sur ces deux droites ; cette horizontale a pour projection bc; si donc on mène une ligne rs perpendiculaire à bc, on aura la projection d'une ligne de plus grande pente du plan.

Par le point a, menons af parallèle à bc; cette ligne af est la projection de l'horizontale du plan, qui a pour cote α; les points f et g, où les horizontales af et bc rencontrent rs, sont les points de la ligne de plus grande pente qui ont pour cotes α et $\alpha+1$; la longueur fg est donc égale à une division de l'échelle de pente du plan.

Problème X.

119. *Étant données l'échelle de pente d'un plan, et la projection d'un point situé dans ce plan, mener dans ce plan une droite d'une pente donnée.*

Fig. 99.



Soient mn l'échelle du plan, a la projection du point donné (fig. 99). Si l'on appelle d la distance horizontale de deux points de la droite demandée tels que la différence de leurs cotes soit 1^m, on sait que l'on a $d=\frac{1}{p}$. D'un point p pris sur la projection d'une horizontale du plan, comme centre, avec une ouverture de compas égale à d, on décrira un arc de cercle qui coupera la projection de l'horizontale suivante en q et q'; si du point a on mène des parallèles bc et bc' à pq et pq', on aura évidemment les projections des deux droites demandées.

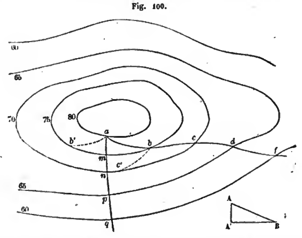
Pour que le problème soit possible, il faut que la longueur *d* soit supérieure ou égale à l'une des divisions de l'échelle du plan; quand la longueur *d* est égale à l'une des divisions de l'échelle du plan, il n'y a qu'une solution, c'est la ligne de plus grande pente menée par le point *a*.

Problème XI.

120. *Tracer sur un plan coté un chemin, une rigole d'irrigation.*

Lorsqu'on veut tracer sur un terrain un chemin ou une rigole d'irrigation, on fait choix d'une certaine pente, celle qui paraît la plus avantageuse pour le but qu'on se propose, et l'on a à résoudre le problème suivant : par un point donné du sol

Fig. 100.



mener une ligne qui ait une pente uniforme égale à une pente donnée.

Si le terrain est plan, la ligne est droite, et nous venons d'indiquer le moyen de la tracer. Si le terrain n'est pas plan, on peut ramener le problème au précédent, pourvu qu'on ait levé des courbes de niveau équidistantes, suffisamment rapprochées. Considérons, en effet, le terrain représenté par la figure 100, et

proposons-nous de mener par le point *a* une ligne dont la pente soit uniforme et égale à p. Soit d la distance horizontale de deux points de cette ligne dont les cotes diffèrent de 5ᵐ (distance constante, puisque la pente est uniforme); on a $d = \frac{5}{p}$. Du point *a* comme centre, avec une ouverture de compas égale à d, décrivons un arc de cercle qui coupera la courbe 75 au point *b*; du point *b* comme centre, avec la même ouverture de compas, décrivons un arc de cercle qui coupera la courbe 70 au point *c*, et ainsi de suite; joignons ces points par un trait continu, nous aurons la ligne demandée. Car chacun des éléments de cette ligne, considéré comme sensiblement rectiligne, a la pente voulue p.

121. Il est à remarquer que la question admet en général un très-grand nombre de solutions; car il y a généralement deux chemins pour aller d'un point d'une courbe de niveau à la courbe immédiatement inférieure suivant une pente donnée. Ainsi, du point *a* pris sur la courbe 80, on peut aller à la courbe 75, suivant la pente voulue, par l'une des deux lignes *ab* ou *ab'*; du point *b* on peut aller de même à la courbe 70, suivant la pente voulue, par l'un des deux chemins *bc* ou *bc'*, etc.

Le problème est impossible, quand la distance d est moindre que la plus courte distance des projections de deux courbes de niveau consécutives. — De toutes ces solutions, l'ingénieur choisira celle qui est la plus avantageuse, d'après la position du point d'arrivée, et les mouvements de terre à effectuer pour tracer la route ou le canal dans la direction projetée.

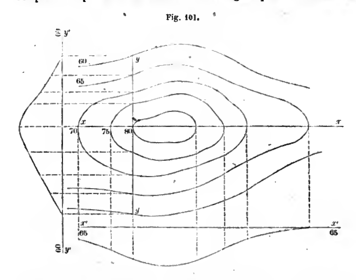
122. Quand on laisse couler les eaux naturellement, elles suivent une ligne de plus grande pente, c'est-à-dire une ligne normale à toutes les courbes de niveau. La ligne de plus grande pente passant par le point *a* est *amnpq*; on l'obtient en menant du point *a* un premier élément *am* perpendiculaire à la courbe de niveau 75, du point *m* un second élément *mn* perpendiculaire à la courbe 70, etc.

Problème XII.

123. *Construire une coupe verticale d'un terrain.*

Pour étudier facilement les sinuosités du terrain dans une direction donnée, on imagine une coupe verticale du terrain dans cette direction. Concevons, par exemple, un plan vertical qui rencontre le plan de projection suivant la ligne xx (fig. 101); ce plan coupe la surface suivant une ligne qu'il est facile de

Fig. 101.



construire par rabattement. Il suffit, en effet, aux points où la ligne xx rencontre les courbes de niveau, d'élever des perpendiculaires à cette ligne, et de porter sur ces perpendiculaires, à partir de cette ligne, des longueurs égales aux cotes des courbes de niveau, puis de joindre les points ainsi obtenus par un trait continu.

Afin que ce dessin ne couvre pas le plan, ce qui produirait de la confusion, on porte les perpendiculaires à partir d'une ligne $x'x'$ parallèle à xx et située en dehors du plan. En outre, pour faire tenir le dessin dans la feuille de papier, on diminue toutes

les cotes d'une même hauteur inférieure ou égale à la cote la plus faible. Ici on a diminué toutes les cotes de 65^m, ce qui revient à prendre pour plan de projection un plan situé à 65^m au-dessus du premier. On a construit de même la coupe verticale suivant *yy*; et, pour rendre plus sensible les sinuosités, on a pris l'échelle des hauteurs cinq fois plus grande que celle des lignes horizontales, $\frac{1}{1000}$ au lieu de $\frac{1}{5000}$.

TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE PREMIER.

PRINCIPES.

CHAPITRE II.

PROBLÈMES SUR LA LIGNE DROITE ET LE PLAN.

CHAPITRE III.

SUITE DES PROBLÈMES SUR LA LIGNE DROITE ET LE PLAN.

CHAPITRE IV.

DES MÉTHODES EN GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

CHAPITRE V.

PROJECTIONS D'UN CERCLE.

CHAPITRE VI.

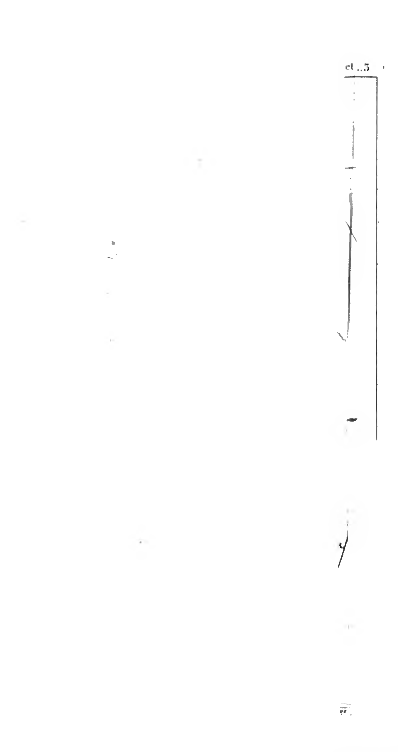
PROJECTIONS DE DIFFÉRENTS SOLIDES.

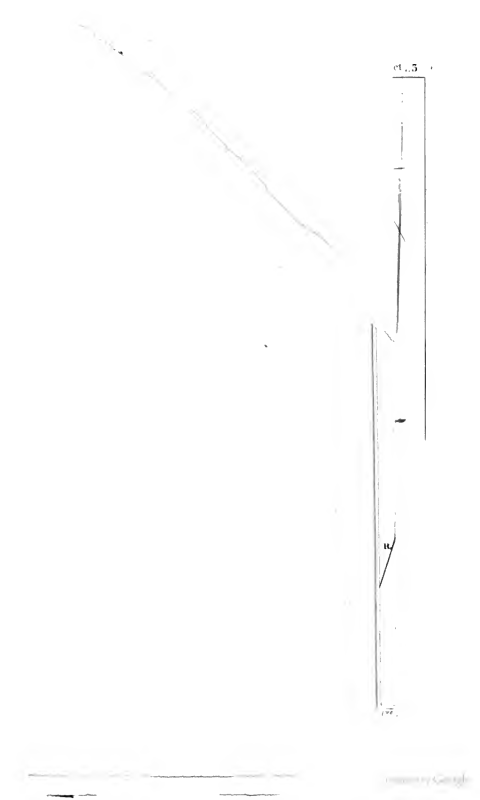
CHAPITRE VII.

PLANS COTÉS.

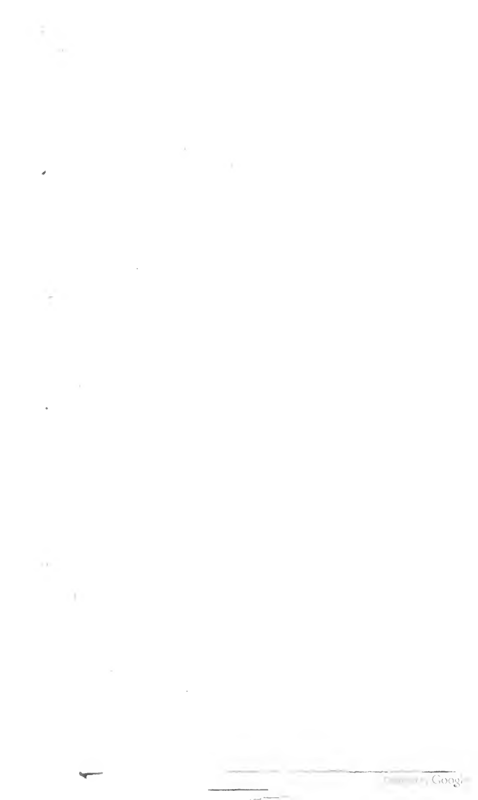
FIN DE LA TABLE.

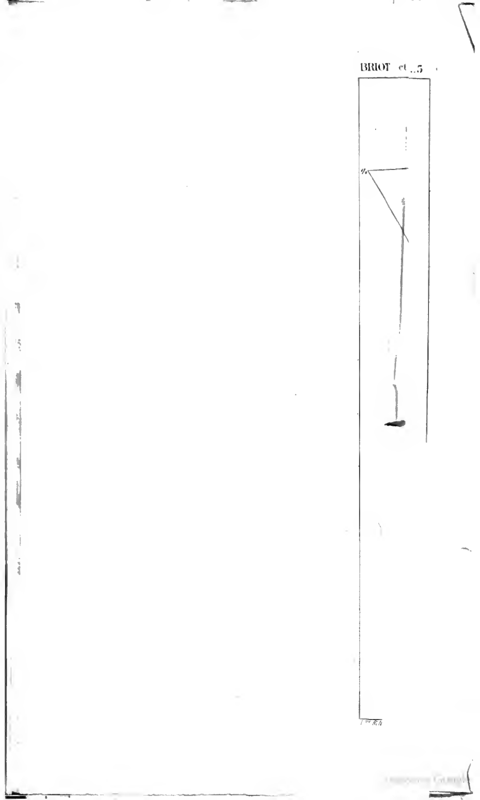
PARIS. — IMPRIMERIE DE CH. LAHURE ET Cie
Rue de Fleurus, 9

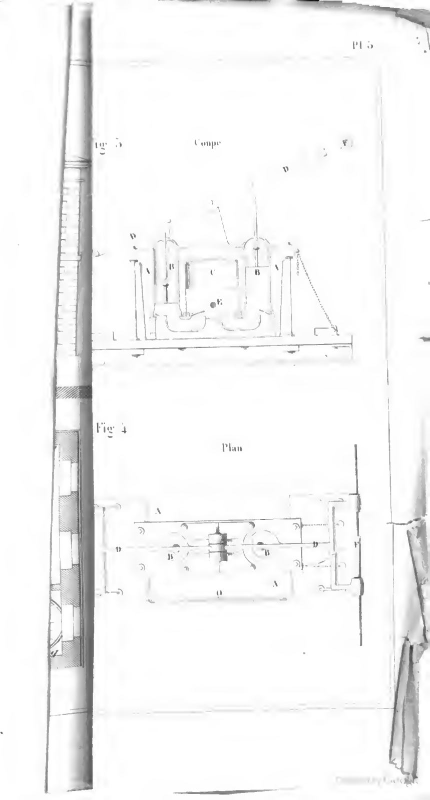




R




BRIOT et ..5


Fig 3
Coupe
D
B
C
B
A
A
E
Fig 4
Plan
A
D
B
B
D
F
A
C



LIBRAIRIE DE L. HACHETTE ET Cie, A PARIS.

OUVRAGES

CONFORMES AUX PROGRAMMES DE L'ENSEIGNEMENT SCIENTIFIQUE DANS LES LYCÉES.

Problèmes et exercices d'arithmétique et d'algèbre sur les principales questions usuelles relatives au commerce, à la banque, aux fonds publics, aux établissements de prévoyance, à l'industrie, aux sciences appliquées, etc.; par M. Sonnet, docteur ès sciences. 2 vol. in-8, brochés. 10 fr.

Tables de logarithmes à cinq décimales, par J. de Lalande, disposées à double entrée et revues par M. Dupuis, professeur de mathématiques. Édition stéréotype contenant les logarithmes des nombres de 1 à 10 000, ceux des sinus et des tangentes des arcs calculés de minute en minute dans la supposition de R = 1, les logarithmes d'addition et de soustraction, et un très-grand nombre de tables usuelles. 1 vol. in-16, broché. 2 fr.
Cartonné en percaline gaufrée. 2 fr. 50 c.

Tables de logarithmes à sept décimales, par F. Callet, revues par J. Dupuis. Édition stéréotype contenant les logarithmes des nombres de 1 à 100 000, les logarithmes des sinus et des tangentes des arcs calculés dans la supposition de R = 1, de seconde en seconde pour les cinq premiers degrés, et de dix secondes en dix secondes pour tous les degrés du quart de cercle, et quelques tables usuelles. 1 vol. grand in-8. Prix, broché, 8 fr. 50 c.; cartonné en percaline gaufrée. 10 fr.

Éléments de géométrie analytique, rédigés conformément au dernier programme d'admission à l'École polytechnique et à l'École normale supérieure, par MM. Sonnet et Frontera, docteurs ès sciences. 2e édition. 1 vol. in-8. 7 fr. 50 c.

Éléments de géométrie, conformes aux derniers programmes officiels, par M. Briot, professeur de mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis, et M. Vacquant, professeur de mathématiques appliquées au lycée Napoléon :
1° *Théorie*, par M. Briot. Nouvelle édition. 1 beau vol. in-8, avec de nombreuses figures dans le texte. Prix, broché. 5 fr.
2° *Application*, par MM. Briot et Vacquant. Nouvelle édition. 1 beau vol. in-8, avec des figures dans le texte et des planches. Prix, broché. 3 fr. 50 c.

Éléments de géométrie descriptive, contenant les matières indiquées par les programmes de l'École militaire de Saint-Cyr, de l'École navale et du baccalauréat ès sciences, par MM. Briot et Vacquant. 1 vol. in-8, avec des figures dans le texte. Prix, broché. 2 fr. 50 c.

Traité élémentaire de géométrie descriptive, à l'usage des candidats à l'École polytechnique, rédigé par M. Tresca, sous-directeur du Conservatoire des arts et métiers, d'après les ouvrages et les leçons de M. Th. Olivier. 1 vol. in-8 de texte et 1 vol. de planches. Prix, brochés. 7 fr. 50 c.

Notions de mécanique, à l'usage de la classe de mathématiques spéciales, par M. Sonnet, inspecteur de l'Académie de Paris. 2e édition, mise en harmonie avec les derniers programmes officiels. 1 vol. in-8, avec planches. 5 fr.

Premiers éléments de mécanique appliquée, par le même auteur. 4e édition conforme aux programmes de l'enseignement dans les lycées (classe de Rhétorique) et à celui du baccalauréat ès sciences. 1 volume in-12, avec planches. 4 fr.

Leçons de cosmographie, par M. Faye, membre de l'Institut, inspecteur général de l'instruction publique; 2e édition. 1 vol. in-8, avec planches. 6 fr.

Éléments de cosmographie, par M. Sainte-Preuve, ancien professeur de physique au lycée Saint-Louis; nouvelle édition mise en harmonie avec les programmes de l'enseignement scientifique dans les lycées (classe de Rhétorique) et avec celui du baccalauréat ès sciences. 1 vol. in-18 jésus, broché. 2 fr. 50 c.

Cours de chimie, rédigé conformément aux derniers programmes officiels, par M. Boutet de Monvel, professeur de physique et de chimie au lycée Charlemagne. Nouvelle édition. 1 vol. in-18 jésus, avec des figures dans le texte. Prix, broché. 5 fr.

Cours de physique, rédigé conformément aux programmes de l'enseignement scientifique dans les lycées et à celui du baccalauréat ès sciences, par le même auteur. 1 beau vol. in-18 jésus, avec des figures dans le texte. 6 fr.

Notions générales de physique et de météorologie, par M. Pouillet, membre de l'Institut. 3e édition, comprenant les matières de l'enseignement scientifique dans les lycées et celles du baccalauréat ès sciences. 1 beau vol. in-18 jésus de plus de 500 pages, avec figures intercalées dans le texte. Prix, broché. 6 fr.

Paris. — Imprimerie de Ch. Lahure et Cie, rue de Fleurus, 9.



